ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2011, том 47, № 8, с. 1205–1208

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.93

К ОПИСАНИЮ НЕГЛАДКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

© 2011 г. И. Н. Прядко, Б. Н. Садовский

Предлагается новый способ математического описания систем, испытывающих негладкие воздействия, основанный на рассмотрении специального уравнения “с нелинейным дифференциалом”. Для линейных систем при внешних воздействиях ограниченной вариации получена формула решения задачи Коши, обобщающая известную формулу для линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Описание уравнения. Изучению эволюционных процессов с импульсными воздействиями и импульсных систем управления посвящена обширная литература (см. [1–5]). В настоящей работе мы обращаем внимание на возможность описания процессов с негладкими внешними воздействиями с помощью уравнений, близких по структуре к квазидифференциальным уравнениям [6] или к уравнениям с нелинейными дифференциалами [7]. Предлагаемое уравнение имеет вид

$$\Delta x(t) = A(t)x(t)\,dt + \Delta B(t) + o(dt + \|B(t+0) - B(t)\|). \tag{1}$$

Здесь $\Delta x(t) = x(t+dt) - x(t)$ – приращение неизвестной функции вещественной переменной t, соответствующее приращению аргумента $dt > 0$; $x(t)$ принимает значения в $\mathbb{R}^n$; $A:\ I \to \mathbb{M}^n$ – известная непрерывная функция, определенная на промежутке I вещественной оси и принимающая значения в пространстве вещественных $n\times n$-матриц $\mathbb{M}^n$; $B:\ I \to \mathbb{R}^n$ – известная непрерывная слева функция ограниченной вариации; $\Delta B(t) = B(t+dt) - B(t)$; $B(t+0) = \lim\limits_{dt\to+0} B(t+dt)$.

Решением уравнения (1) назовем непрерывную слева функцию $x:\ I_x \to \mathbb{R}^n$, определенную на промежутке $I_x \subset I$ и удовлетворяющую в любой точке $t \in I_x \setminus \sup I_x$ соотношению

$$\frac{\Delta x(t) - A(t)x(t)dt - \Delta B(t)}{dt + \|B(t+0) - B(t)\|} \to 0 \quad \text{при} \quad dt \to +0. \tag{2}$$

Заметим, что любое решение $x(t)$ уравнения (1) в любой точке t имеет правый предел $x(t+0)$, причем

$$x(t+0) - x(t) = B(t+0) - B(t). \tag{3}$$

Действительно, из соотношения (2) следует, что

$$\Delta x(t) - A(t)x(t)dt - \Delta B(t) \to 0 \quad \text{при} \quad dt \to +0.$$

Поскольку $B(t)$ – функция ограниченной вариации, то она в любой точке имеет конечный правый предел. Отсюда и вытекает справедливость замечания.

Заметим также, что в точках разрыва функции $B(t)$ соотношения (2) и (3) эквивалентны, так как в этом случае знаменатель в (2) имеет ненулевой предел.

Отметим, кроме того, что уравнение (1) с заданным начальным условием может не иметь решения, если в нем заменить $o(dt+\|B(t+0)-B(t)\|)$ на $o(dt)$. В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta x(t) = x\,dt + \Delta\chi_{(0,+\infty)}(t) + o(dt), \tag{4}$$

$$x(0) = 0.$$

Здесь $\chi_{(0,+\infty)}$ – характеристическая функция полуоси $(0,+\infty)$, равная единице на этой полуоси и нулю на $(-\infty,0]$.

При $t > 0$ уравнение (4) эквивалентно уравнению $\dot{x} = x$, решение которого имеет вид $x = ce^t$. В точке $t = 0$ равенство (4) имеет вид $x(dt) = 1 + o(dt)$. Отсюда следует, что $x(+0) = 1$, т.е. $c = 1$. Таким образом, решением рассматриваемой задачи на $[0, +\infty)$ может быть только функция

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t = 0, \\ e^t & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

Покажем, что она не удовлетворяет в нуле уравнению (4). Действительно, $\Delta x(0) = e^{dt} - 0 = 1 + dt + o(dt) \neq 1 + o(dt)$.

Уравнение (1) будем рассматривать вместе с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Через $\Phi(t)$ будем обозначать фундаментальную матрицу соответствующей линейной однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x(t),$$

нормальную в точке t_0.

2. Теорема (обобщенная формула вариации произвольной постоянной). *Функция*

$$x(t) = \Phi(t)\left[x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, dB(s)\right] \tag{6}$$

является единственным решением задачи (1), (5) на промежутке $I \cap [t_0, +\infty)$.

Интеграл в (6) понимается в смысле Римана–Стилтьеса.

Доказательство теоремы. Представим приращение функции $x(t)$ в виде

$$\Delta x(t) = \Phi(t+dt)\left[x_0 + \int\limits_{t_0}^{t+dt} \Phi^{-1}(s)\, dB(s)\right] - \Phi(t)\left[x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, dB(s)\right] =$$

$$= \Delta\Phi(t)\left[x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, dB(s)\right] + \Phi(t+dt) \int\limits_{t}^{t+dt} \Phi^{-1}(s)\, dB(s).$$

Из того, что $\Delta\Phi(t) = \dot{\Phi}(t)dt + o(dt) = A(t)\Phi(t)dt + o(dt)$ и выражение в квадратных скобках ограничено в окрестности t, следует равенство

$$\Delta x(t) = A(t)x(t)\, dt + \Phi(t+dt) \int\limits_{t}^{t+dt} \Phi^{-1}(s)\, dB(s) + o(dt).$$

Второе слагаемое в правой части представим в виде

$$\Phi(t+dt) \int\limits_{t}^{t+dt} \Phi^{-1}(t+dt)\, dB(s) - \Phi(t+dt) \int\limits_{t}^{t+dt} (\Phi^{-1}(t+dt) - \Phi^{-1}(s))\, dB(s) =$$

$$= \Delta B(t) - \Phi(t+dt) \int\limits_{t}^{t+dt} (\Phi^{-1}(t+dt) - \Phi^{-1}(s))\, dB(s).$$

Заметим, что

$$\left\| \Phi(t+dt) \int\limits_t^{t+dt} (\Phi^{-1}(t+dt) - \Phi^{-1}(s))\, dB(s) \right\| \le$$

$$\le \|\Phi(t+dt)\| \max_{t \le s \le t+dt} \|\Phi^{-1}(t+dt) - \Phi^{-1}(s)\| V_{[t,t+dt]} B.$$

Поскольку матричные функции $\Phi(t)$ и $\Phi^{-1}(t)$ непрерывно дифференцируемы, найдутся такие константы c_1 и c_2, большие нуля, что при достаточно малом $dt > 0$ будут справедливы неравенства

$$\|\Phi(t+dt)\| \le c_1, \quad \max_{t \le s \le t+dt} \|\Phi^{-1}(t+dt) - \Phi^{-1}(s)\| \le c_2\, dt.$$

Далее, имеем

$$V_{[t,t+dt]} B = \|B(t+0) - B(t)\| + V_{(t,t+dt]} B$$

и

$$V_{(t,t+dt]} B \to 0 \quad \text{при} \quad dt \to +0.$$

Итак, справедливо неравенство

$$\|\Delta x(t) - A(t)x(t)\, dt - \Delta B(t)\| \le c_1 c_2\, dt(\|B(t+0) - B(t)\| + V_{(t,t+dt]} B) + \|o(dt)\|.$$

Нетрудно видеть, что правая часть этого неравенства есть $o(\|B(t+0) - B(t)\| + dt)$ как в случае, когда $\|B(t+0) - B(t)\| \ne 0$, так и в случае, когда $\|B(t+0) - B(t)\| = 0$.

Отсюда следует, что функция (6) является решением задачи (1), (5).

Для доказательства единственности воспользуемся следующей леммой Г.В. Мартыненко о дифференциальном неравенстве (см., например, [8, лемма 4.2]). *Пусть вещественная функция $f(t,u)$ непрерывна в открытом (t,u)-множестве $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ и $u^0(t)$ – максимальное решение задачи Коши*

$$u'(t) = f[t, u(t)], \quad u(t_0) = u_0.$$

Пусть также функция $y(t)$ непрерывна на $[t_0, t_1]$ и удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству с правым верхним производным числом Дини: $D^* y(t) \le f[t, y(t)]$ всюду, кроме, быть может, счетного множества, и неравенству $y(t_0) \le u_0$. Тогда справедливо неравенство $y(t) \le u^0(t)$ на общем промежутке существования функций $y(t)$ и $u^0(t)$.

Пусть $x(t)$, $\bar{x}(t)$ – решения задачи (1), (5). Они непрерывны слева и имеют в одних и тех же точках одинаковые скачки. Поэтому функция $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ непрерывна. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta y(t) = A(t)y(t)\, dt + o(dt + \|B(t+0) - B(t)\|).$$

В точках непрерывности функции $B(t)$ это уравнение эквивалентно соотношению

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t).$$

Заметив, что $D^*\|y(t)\| \le \|\dot{y}(t)\|$, получаем неравенство

$$D^*\|y(t)\| \le \|A(t)\|\|y(t)\|,$$

которое выполнено всюду, за исключением не более чем счетного множества точек разрыва функции $B(t)$. Теперь из леммы Г.В. Мартыненко вытекает, что $y(t) \equiv 0$ при $t \ge t_0$, т.е. решения $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ справа от t_0 совпадают. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мильман В.Д., Мышкис А.Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. мат. журн. 1960. № 2. С. 233–237.
2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, 1987.
3. *Zavalishchin S.T., Sesekin A.N.* Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Dordrecht, 1997.
4. *Миллер Б.М.* Обобщенные решения в нелинейных задачах оптимизации с импульсными управлениями. I. Проблема существования решения // Автоматика и телемеханика. 1995. № 4. С. 62–76.
5. *Миллер Б.М.* Обобщенные решения в нелинейных задачах оптимизации с импульсными управлениями. II. Представление решений с помощью дифференциальных уравнений с мерой // Автоматика и телемеханика. 1995. № 5. С. 56–70.
6. *Панасюк А.И., Бентсман Дж.* Применение квазидифференциальных уравнений к описанию разрывных процессов // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 1339–1348.
7. *Kloeden P.E., Sadovsky B.N., Vasilyeva I.E.* Quasi-flows and equations with nonlinear differentials // Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. 2002. V. 51. P. 1143–1158.
8. *Кривошеева О.В.* Некоторые замечания о дифференциальных неравенствах // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Физика. Математика. Воронеж, 2008. № 1. С. 264–267.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
26.08.2009 г.