

1. Кинематика

1.1. Основные понятия

1.2. Сложное движение точки

1.3. Движение твердого тела

2. Динамика

2.1. Основные понятия и законы динамики

2.2. Метод фазовой плоскости

2.3. Движение в центральном поле и законы Кеплера

2.4. Теорема об изменении импульса системы

2.4.1. Второй закон Ньютона для системы материальных точек.

Изучается движение системы A материальных точек A_k с массами m_k ($k=1, \dots, n$). Внутренняя сила, действующая на A_k со стороны A_j , обозначается через F_{kj}^i , а сумма всех внешних сил, действующих на точку A_k , — через F_k^e . Тогда по второму закону Ньютона

$$m_k \ddot{r}_k = F_k^e + \sum_{j=1}^n F_{kj}^i \quad (k=1, \dots, n). \quad (1)$$

В ближайших параграфах для таких систем устанавливаются три теоремы: об изменении импульса, кинетического момента и кинетической энергии.

2.4.2. Теорема об изменении импульса системы.

Импульс (количество движения) p системы материальных точек определяется как сумма импульсов p_k входящих в нее точек:

$$p := \sum_k p_k = \sum_k m_k v_k.$$

Здесь и в дальнейшем суммирование по номеру точки распространяется в пределах от 1 до n .

Теорема утверждает, что скорость изменения импульса системы равна сумме всех внешних сил, действующих на точки системы:

$$\dot{p} = \sum_k F_k^e. \quad (2)$$

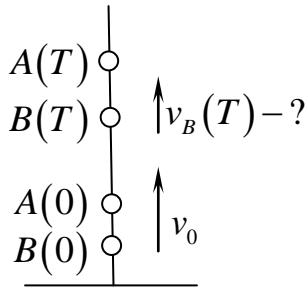
▷ Действительно,

$$\dot{p} = \sum_k m_k \dot{v}_k = \sum_k m_k \ddot{r}_k = \sum_k F_k^e + \sum_k \sum_j F_{kj}^i.$$

Остается заметить, что сумма всех внутренних сил равна нулю, так как по третьему закону Ньютона $F_{kj}^i = -F_{jk}^i$. ◁

2.4.3. Пример: заряженные бусинки на вертикальном стержне.

Две тяжелые бусинки A, B несут на себе электрические заряды и свободно перемещаются по вертикальному стержню (A над B). В начальный момент они



имеют одинаковую скорость v_0 , направленную вверх. Через время T верхняя бусинка достигает максимальной высоты. Найти в этот момент скорость нижней бусинки.

На бусинки действуют внутренние силы притяжения или отталкивания электрических зарядов и взаимное гра-

витационное притяжение, а также внешние силы тяжести

$$F_1^e + F_2^e = -mg - mg = -2mg$$

(считаем, что массы бусинок одинаковы). По теореме об изменении импульса системы:

$$\begin{aligned} \dot{p} = -2mg &\Rightarrow p(T) - p(0) = -2mgT \Rightarrow \\ mv_A(T) + mv_B(T) &= 2mv_0 - 2mgT. \end{aligned}$$

Поскольку в крайнем верхнем положении бусинка имеет нулевую скорость, т.е. $v_A(T) = 0$, получаем:

$$v_B(T) = 2(v_0 - gT).$$

Интересно, что для получения ответа нам не потребовалось знать, каких знаков были заряды бусинок, а также сталкивались ли бусинки во время движения, поскольку внутренние силы (в частности, силы соударения) не влияют на изменение импульса системы.

2.4.4. Закон сохранения импульса системы.

Очевидным следствием теоремы об изменении импульса является следующее важное утверждение: *если внешние силы, действующие на точки системы, в каждый момент имеют нулевую сумму, то импульс системы сохраняет постоянное значение:*

$$\sum_k F_k^e = 0 \Rightarrow p = const. \quad (3)$$

Например, если система состоит из трех точек, две из которых притягиваются к потолку с силой f , а третья – к полу с силой $2f$, то

$$m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3 = const.$$

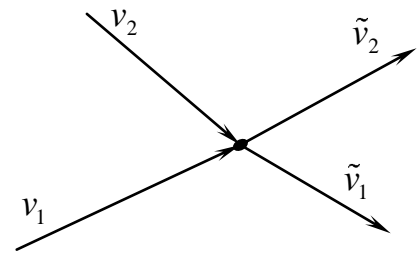
2.4.5. Пример: соударение частиц.

Пусть частицы A_1, A_2 с массами m_1, m_2 имеют до соударения скорости v_1, v_2 , а после соударения скорость первой частицы равна \tilde{v}_1 . Допустим, что внешние силы отсутствуют. Тогда закон сохранения импульса позволяет найти скорость \tilde{v}_2 второй частицы после соударения. Действительно, по этому закону

$$m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Поэтому

$$\tilde{v}_2 = \frac{m_1(v_1 - \tilde{v}_1) + m_2 v_2}{m_2}.$$



2.4.6. Теорема о движении центра масс системы.

Центром масс системы A называется точка C , радиус-вектор которой задается формулой:

$$r_C := \frac{\sum_k m_k r_k}{\sum_k m_k} = \sum_k \frac{m_k}{m} r_k \quad \left(m := \sum_k m_k \right).$$

С использованием этого понятия теорему об изменении импульса системы можно эквивалентно переформулировать в следующем виде: *центр масс системы материальных точек движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы m и на него действуют все внешние силы F_k^e :*

$$m \ddot{r}_C = \sum_k F_k^e. \quad (4)$$

▷ Действительно, левая часть последнего соотношения есть не что иное, как скорость изменения импульса системы:

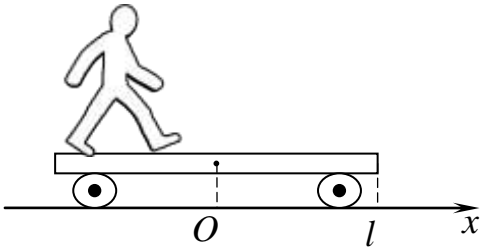
$$m \ddot{r}_C = \frac{d}{dt} m \sum_k \frac{m_k}{m} \dot{r}_k = \frac{d}{dt} p.$$

Поэтому (4) эквивалентно (2). ◁

2.4.7. Пример: человек на тележке.

Человек переходит из одного конца тележки в другой; тележка в горизонтальном направлении перемещается без сопротивления. Как изменится положение тележки?

Данную систему можно представлять как состоящую из очень большого числа



материальных точек. Они связаны разнообразными внутренними силами, а также на них действуют внешние силы: сила тяжести и направленная вверх сила реакции, удерживающая колеса на горизонтальной поверхности. Внешние силы направлены по вертикали, т.е. их горизонтальные составляющие равны нулю.

Поэтому удобно воспользоваться теоремой о движении центра масс в проекциях на горизонтальную ось:

$$m\ddot{x}_C = \sum_k (F_k^e)_x = 0.$$

Следовательно,

$$\dot{x}_C = \text{const}.$$

В начальный момент система находилась в покое, поэтому

$$\dot{x}_C \equiv 0, \text{ т.е. } x_C = \text{const}.$$

Пусть m – масса человека; M – масса тележки; $2l$ – длина тележки; x, X – горизонтальные координаты, соответственно, центров масс человека и тележки;

$X(0) = 0, x(0) = -l$. Тогда

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{m+M} (mx + MX), \quad x_C(0) = -\frac{ml}{m+M} = x_C(T) = \\ &= \frac{1}{m+M} (m(X(T) + l) + MX(T)) = X(T) + \frac{ml}{m+M}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X(T) = -\frac{2ml}{m+M}.$$

2.5. Теорема об изменении кинетического момента

2.5.1. Теорема об изменении и закон сохранения кинетического момента.

Кинетический момент (момент количества движения, момент импульса) точки A_k относительно начала координат O : $M_k := [r_k, m_k v_k] = [r_k, p_k]$; кинетический момент системы материальных точек: $M := \sum_k M_k$.

Теорема утверждает, что

$$\dot{M} = \sum_k [r_k, F_k^e], \quad (5)$$

т.е. скорость изменения кинетического момента системы равна сумме моментов внешних сил относительно начала координат O . В частности, если сумма моментов внешних сил равна нулю, то кинетический момент сохраняет постоянное значение.

▷ Действительно,

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} \sum_k [r_k, p_k] = \sum_k [\dot{r}_k, m_k \dot{r}_k] + \sum_k [r_k, m_k \ddot{r}_k] = 0 + \sum_k [r_k, F_k^e] + \sum_k \sum_j [r_k, F_{kj}^i].$$

Покажем, что двойная сумма в правой части равна нулю. Для этого заметим, что матрица с элементами $[r_k, F_{kj}^i]$ является кососимметрической, т.е. $[r_j, F_{jk}^i] = -[r_k, F_{kj}^i]$. Это равенство справедливо, так как

$$[r_j, F_{jk}^i] = [r_k, F_{jk}^i] + [r_j - r_k, F_{jk}^i] = -[r_k, F_{kj}^i] + 0$$

(последнее слагаемое равно нулю, поскольку векторы $r_j - r_k$ и F_{jk}^i коллинеарны).

2.5.2. Пример: движение в центральном поле.

При движении в центральном поле сила действует по направлению радиус-вектора (см. 2.3.1, 2.3.2) поэтому момент силы $[r, F]$ равен нулю. Следовательно, кинетический момент не меняется; этим мы неоднократно пользовались в параграфе 2.3.

2.5.3. Пример: неизменяемая плоскость Лапласа.

В частности, не изменяются кинетические моменты планет Солнечной системы. Точнее говоря, они *мало* изменяются под воздействием взаимных притяжений планет. Более точно закон сохранения кинетического момента выполняется для всей системы планет, т.е. для суммы кинетических моментов планет, поскольку в этом случае внешние силовые воздействия значительно слабее. Плоскость, ортогональная суммарному кинетическому моменту планет, называется *неизменяемой плоскостью Лапласа* – на ее важность для астрономии обратил внимание Лаплас в 1789 году.

2.5.4. Осевые кинетические моменты.

Координаты кинетического момента M обозначаются M_x, M_y, M_z и называются *осевыми кинетическими моментами системы*:

$$M = M_x e_x + M_y e_y + M_z e_z = (M, e_x) e_x + (M, e_y) e_y + (M, e_z) e_z.$$

Вычислим осевой кинетический момент M_z :

$$M_z = (M, e_z) = \sum_k ([r_k, m_k v_k], e_z) = \sum_k m_k ([e_z, r_k], v_k) \quad (6)$$

(использовано известное равенство $([a, b], c) = (c, [a, b])$). Далее,

$$[e_z, r_k] = [e_z, \rho_k e_{\rho_k} + z_k e_z] = \rho_k e_{\varphi_k}$$

и

$$v_k = \dot{\rho}_k e_{\rho_k} + \rho_k \dot{\varphi}_k e_{\varphi_k} + \dot{z}_k e_z = \dot{\rho}_k e_{\rho_k} + \rho_k \dot{\varphi}_k e_{\varphi_k};$$

поэтому

$$M_z = \sum_k m_k (\rho_k e_{\varphi_k}, \dot{\rho}_k e_{\rho_k} + \rho_k \dot{\varphi}_k e_{\varphi_k}) = \sum_k m_k \rho_k^2 \omega_k \quad (\omega_k := \dot{\varphi}_k). \quad (7)$$

2.5.5. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\omega = \omega(t)$. Тогда для всех частиц A_k этого тела их угловые скорости ω_k одинаковы и равны ω , поэтому из (7) следует, что

$$M_z = \omega \sum_k m_k \rho_k^2.$$

Сумма в правой части (точнее, ее предел при неограниченном измельчении частиц, на которые разбивается тело) называется *моментом инерции* данного тела относительно оси Oz и обозначается J_z . Таким образом,

$$M_z = J_z \omega. \quad (8)$$

Далее, из теоремы об изменении кинетического момента получаем:

$$\dot{M}_z = (\dot{M}, e_z) = \sum_k ([r_k, F_k^e], e_z) = \sum_k ([e_z, r_k], F_k^e) = \sum_k \rho_k (e_{\varphi_k}, F_k^e).$$

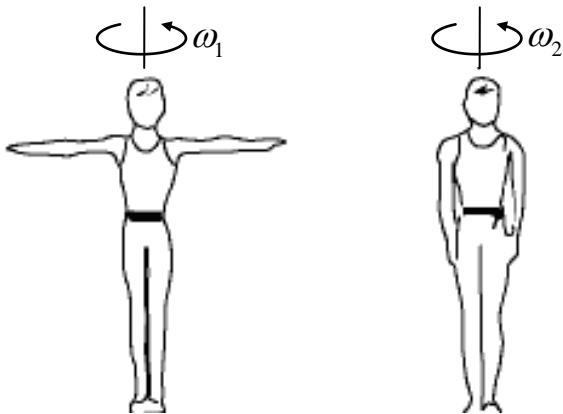
Слагаемые в последней сумме называются *моментами сил* F_k^e относительно оси Oz . Из полученных равенств вытекает следующее уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$J_z \dot{\omega} = \sum_k \rho_k (e_{\varphi_k}, F_k^e) - \quad (9)$$

произведение осевого момента инерции тела на угловое ускорение равно сумме моментов всех внешних сил относительно оси вращения.

2.5.6. Пример: фигурист.

Если при выступлении на соревнованиях по фигурному катанию на коньках



спортсмен начал вращение с поднятыми в стороны руками, а затем опустил руки вдоль туловища, то как при этом изменилась его угловая скорость?

$$\omega_1 < \omega_2? \quad \omega_1 = \omega_2? \quad \omega_1 > \omega_2?$$

Внешние силы – вес и реакция льда – направлены вертикально, их моменты относительно вертикальной оси вращения равны нулю. Силы трения об лед и сопротивления воздуха не учитываем ввиду их малости. Поэтому кинетический момент сохраняет постоянное значение. С учетом формулы (8) это означает, что

$$J_{z1} \omega_1 = J_{z2} \omega_2.$$

Момент инерции J_{z_1} фигуриста с поднятыми руками строго больше его момента инерции J_{z_2} с опущенными руками, так как при вычислении момента инерции массы частиц умножаются на квадраты расстояний до оси. Следовательно,

$$\omega_1 < \omega_2.$$

2.5.7. Вычисление осевых моментов инерции некоторых тел.

По определению, момент инерции тела Q относительно оси Oz задается формулой:

$$J_z = \lim \sum_k m_k \rho_k^2;$$

предел берется «при неограниченном измельчении частей, на которые делится тело». Формально этот предел можно записать в виде интеграла:

$$J_z = \iiint_Q (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dx dy dz; \quad (10)$$

здесь $\mu(x, y, z)$ – плотность распределения массы, т.е. предел отношения массы малой частицы к ее объему при стягивании частицы к точке (x, y, z) . Для однородного тела массы m и объема V

$$\mu(x, y, z) \equiv \frac{m}{V}.$$

В цилиндрических координатах (10) принимает вид:

$$J_z = \iiint_{Q_{\rho\varphi z}} \rho^2 \mu(x, y, z) \rho d\rho d\varphi dz. \quad (11)$$

В этой формуле $Q_{\rho\varphi z}$ есть область изменения цилиндрических координат точки тела Q ; и $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$.

Для плоской фигуры S в плоскости xOy (10) и (11) можно записать в форме:

$$J_z = \iint_S (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dx dy = \iint_{S_{\rho\varphi}} \rho^3 \sigma(x, y) d\rho d\varphi. \quad (12)$$

Для прямолинейного стержня L на оси Ox

$$J_z = \int_L x^2 \lambda(x) dx \quad (13)$$

В двух последних формулах $\sigma(x, y)$ и $\lambda(x)$ – это, соответственно, *поверхностная* и *линейная* плотность распределения массы; для однородных тел

$$\sigma(x, y) \equiv \frac{m}{|S|}, \quad \lambda(x) \equiv \frac{m}{|L|}$$

где $|S|$ – площадь плоской фигуры, $|L|$ – длина стержня.

Ниже приводятся вычисления осевых моментов инерции для некоторых часто встречающихся тел.

(а) Однородный тонкий стержень $\{(x, 0, 0) : 0 \leq x \leq l\}$ массы m .

$$J_z = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}.$$

(б) Однородная окружность $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = R^2\}$ массы m .

$$J_z = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{m}{2\pi} d\varphi = mR^2.$$

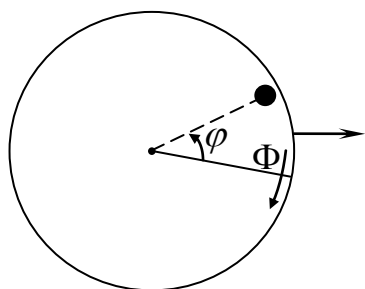
(в) Однородный цилиндр $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$ массы m .

$$J_z = \frac{m}{\pi R^2 h} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{mR^2}{2}.$$

(г) Однородный круглый диск $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ массы m .

$$J_z = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{mR^2}{2}.$$

2.5.8. Пример: человек на платформе Жуковского.



Круглая платформа свободно вращается вокруг центра в горизонтальной плоскости. Человек от данной отметки на платформе совершает по ее краю полный круг. Как при этом изменится положение отметки на платформе по отношению к отметке на земле?

В следующих вычислениях верхними индексами

Π, Ψ отмечаются, соответственно, характеристики, относящиеся к платформе и к человеку; φ – угол поворота радиус-вектора человека относительно отметки на платформе, Φ – угол поворота отметки на платформе относительно отметки на земле.

$$M_z = M_z^\Pi + M_z^\Psi = J_z^\Pi \dot{\Phi} + J_z^\Psi (\dot{\varphi} + \dot{\Phi}) = \left(\frac{m^\Pi R^2}{2} + m^\Psi R^2 \right) \dot{\Phi} + m^\Psi R^2 \dot{\varphi}.$$

Внешние силы направлены параллельно оси Oz , векторы e_{φ_k} перпендикулярны этой оси. Поэтому

$$(e_{\varphi_k}, F_k^e) = 0 \Rightarrow M_z = \text{const} = 0 \text{ (из состояния покоя)};$$

$$0 = M_z = \left(\frac{m^\Pi R^2}{2} + m^\Psi R^2 \right) \dot{\Phi} + m^\Psi R^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} m^\Pi + m^\Psi \right) R^2 \Delta\Phi = -m^\Psi R^2 \Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \Rightarrow \Delta\Phi = -\frac{4m^\Psi \pi}{m^\Pi + 2m^\Psi}.$$

2.5.9. Теорема Гюйгенса – Штейнера.

Пусть J_C – момент инерции относительно оси, параллельной Oz и проходящей через центр масс C данного тела, d – расстояние от C до оси Oz . Тогда

$$J_z = J_C + md^2. \quad (14)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} J_z &= \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum_k m_k \left((x_k - x_C)^2 + (y_k - y_C)^2 \right) + 2 \sum_k m_k (x_k x_C + y_k y_C) - \\ &- \sum_k m_k (x_C^2 + y_C^2) = J_C + 2m \left(\frac{\sum_k m_k x_k}{m} x_C + \frac{\sum_k m_k y_k}{m} y_C \right) - m(x_C^2 + y_C^2) = J_C + md^2. \end{aligned}$$

Примеры.

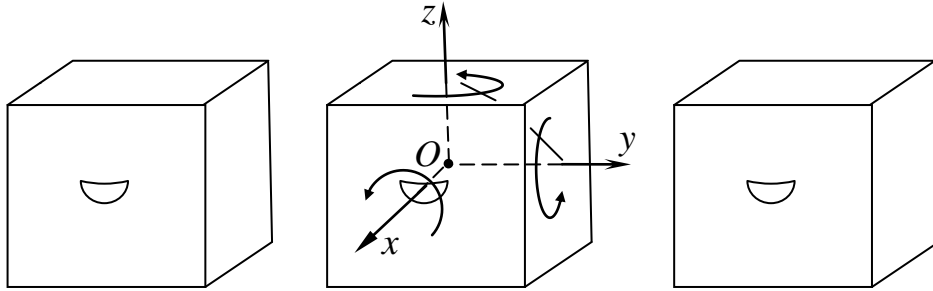
1) Однородный тонкий стержень $\{(x, 0, 0) : 0 \leq x \leq l\}$ массы m , найти J_C .

$$J_C = J_z - m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}.$$

2) Однородный круглый диск $\{(x, y, 0) : (x - R)^2 + y^2 \leq R^2\}$ массы m , найти J_z

$$J_z = J_C + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}.$$

2.5.10. Пример: три коробки.



$$M(t_1) - M(t_0) = J\Omega(\tilde{e}_1(t_1) - \tilde{e}_1(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} [r, F] dt = e_z \rho f \Delta t;$$

$$|\Delta \tilde{e}_1| = |\tilde{e}_1(t_1) - \tilde{e}_1(t_0)| = \frac{\rho f \Delta t}{J\Omega}.$$

2.5.11. О гироскопе (википедия).

2.6. Теорема об изменении кинетической энергии

2.6.1. Формулировка и доказательство теоремы.

Кинетическая энергия материальной точки: $T_k := \frac{m_k v_k^2}{2}$

($\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$ – джоуль);

Кинетическая энергия системы материальных точек: $T := \sum_k T_k$ (Дж).

Мощность силы F_k , действующей на точку A_k : (F_k, v_k) ($= P_k$).

Теорема утверждает, что скорость изменения кинетической энергии системы равна сумме мощностей всех сил, действующих на точки системы:

$$\dot{T} = \sum_k (F_k, v_k), \quad (15)$$

где

$$F_k = F_k^e + \sum_j F_{kj}^i -$$

сумма всех сил, действующих на точку A_k .

$$\triangleright \quad \dot{T} = \frac{d}{dt} \sum_k \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_k m_k (v_k, \dot{v}_k) = \sum_k (F_k, v_k). \quad \triangleleft$$

Отметим еще интегральную форму теоремы:

$$T(t_2) - T(t_1) = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} (F_k(s), v_k(s)) ds.$$

Интеграл в правой части называется *работой силы F_k на данном промежутке времени*. Он может быть записан в виде криволинейного интеграла по кривой

$$\Gamma_k = \{r_k(t) : t_1 \leq t \leq t_2\}:$$

$$\int_{\Gamma_k} (F_k(s), dr_k(s)) =: A_k.$$

Работа A_k , как и энергия, измеряется в *джоулях*.

2.6.2. Случай неизменяемой системы.

Напомним, что система материальных точек называется *неизменяемой*, если не меняются во времени расстояния между ее точками (в частности, это может быть твердое тело или твердая среда).

Утверждается, что скорость изменения кинетической энергии неизменяемой системы равна сумме мощностей всех внешних сил, действующих на точки этой системы.

Доказательство. Достаточно проверить, что сумма мощностей внутренних сил равна нулю, т.е.

$$\sum_k \sum_j (F_{kj}^i, v_k) = 0.$$

Заметим, что матрица с элементами

$$a_{kj} := (F_{kj}^i, v_k)$$

кососимметрична. Действительно,

$$a_{kj} + a_{jk} = (F_{kj}^i, v_k) + (F_{jk}^i, v_j) = (F_{kj}^i, v_k) - (F_{kj}^i, v_j).$$

Сила F_{kj}^i , действующая на точку A_k со стороны точки A_j , направлена по отрезку, соединяющему эти точки. Поскольку расстояние между точками не меняется, проекции скоростей точек A_k, A_j на этот отрезок равны. Следовательно,

$$a_{kj} + a_{jk} = c(r_k - r_j, v_k) - c(r_k - r_j, v_j) = 0$$

Итак, сумма мощностей внутренних сил равна сумме всех элементов кососимметрической матрицы, т.е. равна нулю.

2.6.3. Теорема Кёнига.

Пусть C – центр масс системы; $r_{kC} = r_C - r_k$, $v_{kC} = \dot{r}_{kC}$. Утверждается, что

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \sum_k \frac{m_k v_{kC}^2}{2}. \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \triangleright \quad T &= \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\dot{r}_C + (\dot{r}_k - \dot{r}_C))^2 = \frac{v_C^2}{2} \sum_k m_k + \sum_k \frac{m_k v_{kC}^2}{2} + \\ &\quad + \sum_k m_k (\dot{r}_C, \dot{r}_k - \dot{r}_C). \end{aligned}$$

Остается убедиться, что последняя сумма равна нулю. Действительно,

$$\sum_k m_k (\dot{r}_C, \dot{r}_k - \dot{r}_C) = \left(v_C, \frac{d}{dt} \sum_k m_k r_k \right) - v_C^2 m = \left(v_C, \frac{d}{dt} m r_C \right) - v_C^2 m = 0. \quad \triangleleft$$

2.6.4. Кинетическая энергия твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси.

Если твердое тело вращается вокруг оси Oz , то его кинетическая энергия определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (17)$$

где J_z – момент инерции тела относительно Oz , ω – угловая скорость вращения.

$$\triangleright \quad T = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\rho_k \omega)^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad \triangleleft$$

2.6.5. Пример: осциллятор на катках.

Пусть $M + 2m_1 = m$ (m – масса груза на рис. 2). У какого осциллятора период колебаний больше?

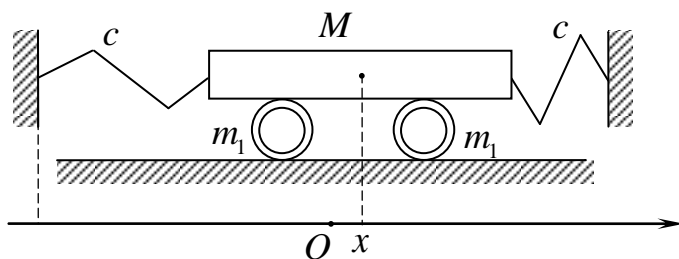


Рис. 1

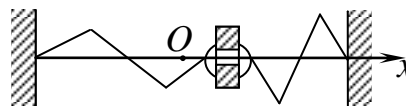


Рис. 2

1) Теорема об изменении кинетической энергии:

$$\dot{T} = \sum_k (F_k, v_k).$$

2) Кинетическая энергия платформы:

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2.$$

3) Скорость верхней точки катка $= \dot{x}$, нижней $= 0$; оси катка и центра масс катка $= \frac{\dot{x}}{2}$; верхней точки катка по отношению к оси катка $= \dot{x} - \frac{\dot{x}}{2} = \frac{\dot{x}}{2}$; угловая скорость катка по отношению к его оси $= \frac{\dot{x}}{2r}$, момент инерции катка $= m_1 r^2$.

4) Кинетическая энергия катка (применяется теорема Кёнига, формула для кинетической энергии твердого тела при вращении вокруг оси и формула для момента инерции полого цилиндра):

$$T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \left(\frac{\dot{x}}{2r} \right)^2 = \frac{1}{4} m_1 \dot{x}^2$$

5) Общая кинетическая энергия системы:

$$T = T_M + 2T_{m_1} = \frac{1}{2} (M + m_1) \dot{x}^2.$$

6) Производная кинетической энергии:

$$\dot{T} = (M + m_1)\dot{x}\ddot{x}.$$

7) Суммарная мощность сил пружин $= -2cx\dot{x}$; суммарная мощность действия сил трения между платформой и верхними точками катка $= f\dot{x} + (-f)\dot{x} = 0$; суммарная мощность действия сил тяжести, действующих на верхние точки катка и реакции катка и земли $= 0$ (так как скорость ортогональна силе тяжести); суммарная мощность сил тяжести, действующих на симметричные относительно оси точки катка, $= 0$, так как касательные составляющие скоростей этих точек взаимно уничтожаются.

8) Итак,

$$(M + m_1)\dot{x}\ddot{x} = -2cx\dot{x}, \text{ т.е. } \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{2c}{M + m_1} > \frac{2c}{M + 2m_1} = \frac{k}{m}.$$

Вывод: частота колебаний осциллятора на катках выше, т.е. период колебаний меньше.

2.6.6. Потенциальные силовые поля.

Силовым полем называется функция F , сопоставляющая каждому r из некоторой области $D(F) \subset \mathbb{R}^3$ вектор $F(r)$, определяющий силовое воздействие этого поля на любую материальную точку из заданного класса, имеющую радиус-вектор r .

Например, закон всемирного тяготения и закон Кулона задают силовые поля, действующие, соответственно, на материальную точку массы m или на точку, несущую электрический заряд величины q .

Силовое поле F называется *потенциальным*, если существует определенная на $D(F)$ скалярная функция $U = U(r) = U(x, y, z)$, градиент которой равен $(-F)$:

$$\text{grad}U(r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = -F(r).$$

Функция U при этом называется *потенциальной энергией* данного силового поля; она определена с точностью до постоянного слагаемого.

2.6.7. Интеграл энергии (закон сохранения энергии).

При движении материальной точки в потенциальном силовом поле полная энергия точки, т.е. сумма ее потенциальной и кинетической энергии, сохраняет постоянное значение:

$$T + U = \text{const} =: E. \quad (18)$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \dot{T} + (\text{grad}U, \dot{r}) = \dot{T} - (F, \dot{r}) = 0.$$

Последнее равенство следует из теоремы об изменении кинетической энергии.

2.6.8. Примеры потенциальных силовых полей.

(а) Одномерное поле $F(r) = f(z)e_z$ с непрерывной вещественной функцией f вещественного аргумента z . Потенциальная энергия:

$$U(r) = u(z), \text{ где } u'(z) = -f(z).$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -f(z) \end{pmatrix} = -f(z)e_z = -F(r).$$

(б) Центральное поле

$$F(r) = f(|r|)e_r \quad (r \neq 0)$$

с непрерывной вещественной функцией f вещественного аргумента.

Потенциальная энергия:

$$U(r) = u(|r|), \text{ где } u'(x) = -f(x).$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = u'(|r|) \begin{pmatrix} \frac{\partial |r|}{\partial x} \\ \frac{\partial |r|}{\partial y} \\ \frac{\partial |r|}{\partial z} \end{pmatrix} = -f(|r|) \frac{r}{|r|} = -f(|r|) e_r = -F(r).$$

2.6.9. Признаки потенциальности.

(Повторение из математического анализа; см., например, Зорич В.А., Математический анализ, ч. 2, М., 2002, гл. XIV, параграф 3).

1) Необходимое условие потенциальности: *если непрерывно дифференцируемое силовое поле $F : (D(F) \text{ откр. } \subset \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ потенциально, то его матрица Якоби симметрична:*

$$\frac{\partial F_i}{\partial r_j} = \frac{\partial F_j}{\partial r_i} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (19)$$

2) В односвязной области для потенциальности непрерывно дифференцируемого поля предыдущее условие не только необходимо, но и достаточно. (Область $D(F)$ называется односвязной, если в ней любую замкнутую кривую можно «непрерывно стянуть» в точку; $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ – не односвязная область, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ – односвязная).

3) Критерий потенциальности: *непрерывное силовое поле $F : (D(F) \text{ откр. } \subset \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ потенциально тогда и только тогда, когда его работа по любому замкнутому контуру равна нулю:*

$$\oint_{\gamma} F ds := \int_{t_0}^{t_1} (F(r(t)), \dot{r}(t)) dt = \int_0^s (F(r(s)), \tau(s)) ds = 0. \quad (20)$$

$\left(s - \text{натуральный параметр, длина дуги; } \tau = \frac{dr}{ds} - \text{единичный вектор касательной} \right).$

2.7. Уравнения Лагранжа

Уравнения Лагранжа – это другая форма уравнений Ньютона, которая во многих случаях оказывается более удобной. Ее преимущества убедительнее всего проявляются при изучении механических систем со связями.

2.7.1. Системы со связями.

Механической системой со связями называется система материальных точек, на движения которых наложены ограничения, вызванные взаимодействием с точками или телами, не входящими в данную систему.

Пример 1: плоский математический маятник с изменяющейся длиной подвеса. Связь, наложенная на движения материальной точки в данном случае, выражается уравнениями

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = l^2(t).$$

Частным случаем является маятник с неизменной длиной подвеса, рассмотренный в п. 2.1.8.

Пример 2: твердое тело. Связи точек в этом случае выражаются соотношениями

$$|r_k - r_j| = \text{const}$$

(расстояние между точками не меняется), или, что то же, уравнениями

$$(r_k - r_j, \dot{r}_k - \dot{r}_j) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |r_k - r_j|^2 = 0$$

(проекция скоростей любых точек на соединяющий их отрезок одинаковы).

Если связь задаётся равенством, то она называется *удерживающей*, или *двусторонней*:

$$B(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Если связь задаётся неравенством, то говорят, что она *неудерживающая*, или *односторонняя*:

$$B(t, x, \dot{x}) \leq 0.$$

Если $B(t, x, \dot{x})$ не зависит от времени, то говорят, что связь *стационарная* (реонная), в противном случае связь называется **нестационарной** (склерономной).

Если $B(t, x, \dot{x})$ не зависит от скоростей, то говорят, что связь *геометрическая*, или *голономная*, а если зависит, то она называется *кинетической* (кинематической, неголономной).

Ещё связи бывают *идеальными* и *неидеальными*; подробнее об этом говорится в следующем пункте.

2.7.2. Реакции связей.

Точки и тела, не входящие в данную механическую систему, могут создавать ограничения на передвижение точек этой системы, действуя на них с теми или иными силами, которые называются *силами реакции связей* (и обозначаются в дальнейшем R_k).

В случае маятника сила реакции связи, удерживающая материальную точку на расстоянии $l(t)$ от точки подвеса, направлена в ту или иную сторону по направлению стержня маятника, а сила, препятствующая выходу стержня из плоскости $z = 0$, направлена по перпендикуляру к этой плоскости:

$$R = C_1 e_\rho + C_2 e_z.$$

Эта сила ортогональна возможному направлению движения маятника:

$$\left(R, \frac{dr}{d\varphi} \right) = 0.$$

Действительно, вектор

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \rho e_\rho = \rho e_\varphi$$

ортогонален как e_ρ , так и e_z ; следовательно, он ортогонален R . Связи, обладающие отмеченным свойством, называются *идеальными*.

В случае твердого тела силы реакции связей – это межмолекулярные взаимодействия, направленные по отрезкам, соединяющим частицы тела.

2.7.3. Обобщенные (лагранжевы) координаты.

Положение n точек механической системы без связей в любой момент времени определяется $3n$ переменными – декартовыми координатами точек. При наличии связей, возможно, существуют наборы меньшего числа вещественных переменных, также определяющие однозначно положения всех точек системы. Такие переменные называются *обобщенными*, или *лагранжевыми* координатами.

Например, положение маятника с переменной длиной подвеса в любой момент времени определяется единственной лагранжевой координатой – полярным углом φ :

$$r = l(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Положение точек твердого тела можно определить двенадцатью вещественными переменными – тремя декартовыми координатами фиксированной точки \tilde{O} данного тела и девятью элементами матрицы B перехода от координат векторов в связанной с телом декартовой системе отсчета \tilde{S} к координатам во «внешней» декартовой системе отсчета S :

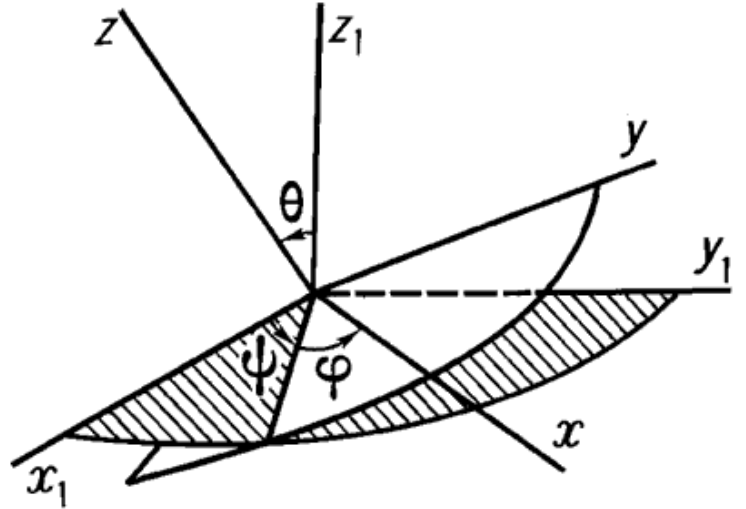
$$r_k = r_{\tilde{O}} + B\tilde{r}_k$$

Но и эти 12 обобщенных координат не образуют минимального набора. Действительно, строки матрицы B составляют ортонормированный набор векторов, что позволяет (по крайней мере локально) исключить 6 переменных. Итак, можно ожидать, что существуют наборы лагранжевых координат, состоящие из 6 переменных.

И действительно, вот один такой набор – три декартовых координаты точки \tilde{O} и три угла Эйлера, определяющие положение \tilde{S} относительно S : угол $\theta \in (0, \pi)$ между $e_{\tilde{3}}$ и e_3 , угол $\varphi \in (0, 2\pi)$ – полярный угол вектора $e = [e_{\tilde{3}}, e_{\tilde{3}}]$ в плоскости xOy и угол $\psi \in (0, 2\pi)$ – угол поворота вектора e против часовой

стрелки вокруг e_3 до совпадения с e_1 . Прямая, проходящая через O с направляющим вектором e называется *линией узлов*.

Последняя система обобщенных координат для твердого тела носит *локальный* характер: любая шестерка указанных переменных определяет положение тела, но не для любого положения тела такая шестерка существует (ввиду строгих неравенств для углов Эйлера).



Для лагранжевых координат традиционно используется обозначение q_i ($i=1, \dots, m$) и векторное обозначение $q = (q_1, \dots, q_m)$.

Если декартовы координаты точек системы выражены через t, q , то кинетическая энергия T выражается через t, q, \dot{q} .

2.7.4. Теорема об уравнениях Лагранжа.

Рассматривается движение системы материальных точек A_k со связями:

$$m_k \ddot{r}_k = F_k + R_k, \quad F_k = F_k^e + \sum_{j=1}^n F_{kj}^i \quad (k=1, \dots, n). \quad (22)$$

Связи заданы параметрическими уравнениями:

$$r_k = r_k(t, q_1, \dots, q_m) = r_k(t, q) \quad (q \in Q \text{ откp.} \subset \mathbb{R}^m). \quad (23)$$

Предполагается, что эти функции дважды непрерывно дифференцируемы и что связи идеальны, т.е. удовлетворяют уравнениям:

$$\sum_k \left(R_k, \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (i=1, \dots, m). \quad (24)$$

Утверждается, что тогда выполнены следующие уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i := \sum_k \left(F_k, \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right) \quad (i=1, \dots, m). \quad (25)$$

(Функции Q_i называются *обобщенными силами*).

Доказательство. По определению,

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{r}_k^2.$$

Вычислим \dot{r}_k :

$$\dot{r}_k = \frac{\partial r_k}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial r_k}{\partial q_l} \dot{q}_l.$$

Из двух последних формул получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k m_k \left(\dot{r}_k, \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_k m_k \left(\dot{r}_k, \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right).$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k m_k \left(\ddot{r}_k, \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right) + \sum_k m_k \left(\dot{r}_k, \frac{\partial^2 r_k}{\partial t \partial q_i} + \sum_l \frac{\partial^2 r_k}{\partial q_l \partial q_i} \dot{q}_l \right).$$

Первая сумма в правой части ввиду (22) и (24) равна Q_i ; вторую обозначим через Z . Итак,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + Z.$$

Далее,

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_k m_k \left(\dot{r}_k, \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial q_i} \right) = \sum_k m_k \left(\dot{r}_k, \frac{\partial^2 r_k}{\partial q_i \partial t} + \sum_l \frac{\partial^2 r_k}{\partial q_i \partial q_l} \dot{q}_l \right).$$

По условию вторые частные производные непрерывны, поэтому, как известно, они не зависят от порядка дифференцирования. Следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = Z$$

и

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + Z - Z = Q_i.$$

Теорема доказана.

2.7.5. Пример: маятник с переменной длиной подвеса.

Единственная обобщенная координата: $q_1 = \varphi$. Вычислим кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt} (l(t) e_\rho) \right)^2 = \frac{1}{2} m (\dot{l} e_\rho + l \dot{\varphi} e_\varphi)^2 = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2).$$

Для составления уравнения Лагранжа найдем $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2ml\dot{\varphi} + ml^2 \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Вычислим обобщенную силу $Q_1 =: Q_\varphi$:

$$Q_\varphi = \left(F, \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) = \left(\begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -lmg \sin \varphi.$$

Итак, уравнение Лагранжа имеет следующий вид:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + 2ml\dot{\varphi} = -mgl \sin \varphi,$$

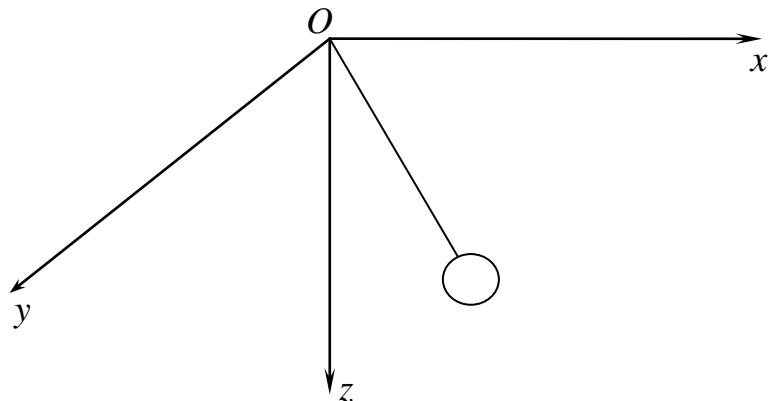
или

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (26)$$

Если l не зависит от t , то результат совпадает с полученным ранее уравнением маятника при неизменной длине подвеса.

2.7.6. Пример: сферический маятник.

Обобщенные координаты: $q_1 = x, q_2 = y$ — декартовы координаты в горизонтальной плоскости; ось Oz направлена вертикально вниз; точка подвеса маятника расположена в начале ко-



ординат. Выразим кинетическую энергию грузика:

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \dot{r} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}; \quad T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$z = z(x, y) = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2}, \quad \dot{z} = z'_x \dot{x} + z'_y \dot{y}, \quad z'_x = -xz^{-1}, \quad z'_y = -yz^{-1}. \quad (27)$$

Для составления первого уравнения Лагранжа найдем $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$, $\frac{\partial T}{\partial x}$ и обобщен-

ную силу $Q_1 =: Q_x$:

$$\frac{dT}{d\dot{x}} = m(\dot{x} + \dot{z}z'_x) = m(\dot{x} + \dot{z}z'_x);$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\dot{x}} = m(\ddot{x} + \ddot{z}z'_x + \dot{z}z''_{tx});$$

$$\frac{dT}{dx} = m\dot{z}z''_{tx},$$

$$\ddot{z} = z''_{tx}\dot{x} + z''_{xx}\dot{x}^2 + z''_{ty}\dot{y} + z''_{yy}\dot{y}^2,$$

$$z''_{tx} = -\frac{d}{dt} xz^{-1} = -\dot{x}z^{-1} + xz^{-2}\dot{z}, \quad z''_{ty} = -\dot{y}z^{-1} + yz^{-2}\dot{z}, \quad (28)$$

$$Q_x = mgz'_x.$$

Итак, первое уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\ddot{x} + \ddot{z}z'_x = gz'_x. \quad (28x)$$

Второе уравнение получается перестановкой переменных x и y :

$$\ddot{y} + \ddot{z}z'_y = gz'_y. \quad (28y)$$

После преобразований:

$$\ddot{x} = -\frac{x}{l^2}(gz + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (29)$$

$$\ddot{y} = -\frac{y}{l^2}(gz + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (30)$$

Таким образом, движение сферического маятника описывается уравнениями (29), (30), (27).

Заметим, что полученные уравнения допускают частный случай плоских колебаний: функция $y \equiv 0$ превращает уравнение (30) в тождество, а уравнение (29) при этом принимает вид

$$\ddot{x} + z'_x(\ddot{z} - g) = 0.$$

С учетом (27), (28) это уравнение приводится к виду:

$$\frac{\ddot{x}}{z} + \frac{x\dot{x}^2}{z^3} + \frac{g}{l} \frac{x}{l} = 0.$$

Последнее уравнение совпадает с выведенным ранее уравнением маятника

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

Действительно,

$$\varphi = \arcsin \frac{x}{l}, \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{l \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}} = \frac{\dot{x}}{z}, \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}z - \dot{x}\dot{z}}{z^2} = \frac{\ddot{x}z^2 + \dot{x}^2 x}{z^3} = \frac{\ddot{x}}{z} + \frac{x}{z^3} \dot{x}^2.$$

2.7.7. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил.

Предположим, что рассматриваемая система материальных точек *голономна*, т.е. на нее действуют только потенциальные силы:

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial r_k}, \quad U = U(r_1, r_2, \dots, r_n).$$

Тогда обобщенные силы можно выразить через потенциальную энергию:

$$Q_i = \sum_k \left(F_k, \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right) = -\sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial r_k}, \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Соответственно, уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Они могут быть более компактно записаны с использованием одной функции

$$L = L(q, \dot{q}, t) := T - U,$$

которая называется *функцией Лагранжа*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (31)$$

2.7.8. Пример: новый вывод уравнений спутника.

Поскольку центральное силовое поле является потенциальным, для записи уравнения спутника можно воспользоваться формой (31). В плоскости xOy , ортогональной кинетическому моменту $M = [r_0, mv_0]$, в качестве лагранжевых координат возьмем полярные координаты. Ниже показано последовательное выражение через них кинетической и потенциальной энергии, функции Лагранжа и составление двух уравнений движения.

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2}; \quad r = r(\rho, \varphi) = \rho e_\rho; \quad q_1 = \rho, q_2 = \varphi;$$

$$\dot{r} = \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\varphi} e_\varphi; \quad T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2); \quad U = -\frac{km}{\rho};$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{km}{\rho}.$$

Первое уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\ddot{\rho}; \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 - \frac{km}{\rho^2};$$

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{k}{\rho^2} = 0$$

(см. уравнение (23) в Динамика 1).

Второе уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \Leftrightarrow \rho^2\dot{\varphi} = const =: \mu$$

(см. уравнение (24) в Динамика 1).

2.7.9. Циклические координаты и функция Рауса.

При выводе последнего уравнения использован тот факт, что функция Лагранжа для спутника не зависит от полярного угла φ (а зависит только от $\dot{\varphi}$). Такие обобщенные координаты называются *циклическими*.

Предположим, что в данной механической системе обобщенные координаты q_1, \dots, q_{m_1} являются циклическими. Тогда система имеет k первых интегралов:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = c_i \quad (i = 1, \dots, m_1).$$

Определим *функцию Рауса* равенством:

$$R = L - \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = L - \sum_{i=1}^{m_1} c_i \dot{q}_i.$$

Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = \dot{q}_i.$$

Для $j = m_1 + 1, \dots, m$ будем иметь:

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Поэтому для нециклических координат справедливы равенства (31) с заменой функции Лагранжа L на функцию Рауса R :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = m_1 + 1, \dots, m).$$

Например, для уравнения спутника функция Рауса имеет вид:

$$R = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{km}{\rho} - m\rho^2 \dot{\varphi} \dot{\varphi} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 - \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{km}{\rho} = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} - \frac{m\mu^2}{2\rho^2} + \frac{km}{\rho}.$$

Поэтому (единственное) уравнение Рауса в этом случае имеет вид:

$$\ddot{\rho} - \frac{\mu^2}{\rho^3} + \frac{k}{\rho^2} = 0.$$

Это же уравнение ранее получено двумя другими способами.

2.8. Метод малого параметра: первое приближение

2.8.1. Линеаризация (вывод уравнений первого приближения).

Рассматривается задача Коши для (n -мерного векторного) дифференциального уравнения второго порядка с вещественным параметром α :

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \alpha), \quad x(t_0) = x_0(\alpha), \quad \dot{x}(t_0) = y_0(\alpha). \quad (32)$$

Решение этой задачи зависит от двух переменных:

$$x = \varphi(t, \alpha).$$

Будем предполагать, что при $\alpha = 0$ решение известно:

$$u = \varphi(t, 0).$$

Если удастся найти функцию

$$z(t) = \left. \frac{\partial \varphi(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0},$$

то для приближенного нахождения x можно будет воспользоваться формулой Тейлора:

$$x = u + z\alpha + O(\alpha^2) \approx u + z\alpha. \quad (33)$$

Подставим решение $x = \varphi(t, \alpha)$ в соотношения (32) и почленно продифференцируем полученные тождества по переменной α в точке $\alpha = 0$:

$$(\ddot{x})'_\alpha = a(t)x'_\alpha + b(t)(\dot{x})'_\alpha + c(t), \quad x'_\alpha(t_0) = c_0, \quad (\dot{x})'_\alpha(t_0) = c_1.$$

Здесь использованы следующие обозначения для известных функций и констант:

$$a(t) := f'_{(2)}(t, u, \dot{u}, 0), \quad b(t) := f'_{(3)}(t, u, \dot{u}, 0), \quad c(t) := f'_{(4)}(t, u, \dot{u}, 0), \\ c_0 := x'_0(0), \quad c_1 := y'_0(0).$$

Существование и непрерывность соответствующих производных от x при условии достаточной гладкости функций f, x_0, y_0 устанавливается в теории дифференциальных уравнений. Поменяв в установленных равенствах порядок дифференцирования по переменным t и α , приходим к линейной системе, определяющей искомую функцию z :

$$\ddot{z} = a(t)z + b(t)\dot{z} + c(t), \quad z(t_0) = c_0, \quad \dot{z}(t_0) = c_1. \quad (34)$$

Итак, нахождение функции z , входящей в приближенную формулу (33), сводится к решению линейной задачи (34).

2.8.2. Пример: малые колебания маятника с переменной длиной подвеса.

Для уравнения (26) маятника с переменной длиной подвеса

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$$

рассмотрим задачу о приближенном нахождении решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$\varphi(0) = \alpha, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (35)$$

с малым параметром α (т.е. решения $\varphi(t, \alpha)$, близкого к нижнему положению равновесия $u = \varphi(t, 0)$). Следуя методике предыдущего пункта, введем новую неизвестную

$$z(t) = \left. \frac{\partial \varphi(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0},$$

продифференцируем соотношения (26), (35) по α и изменим порядок дифференцирования:

$$\ddot{z} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{z} + \omega^2 \cos 0 \cdot z = 0, \quad z(0) = 1, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

Таким образом, для решения φ , близкого к нижнему положению равновесия, справедлива приближенная формула

$$\varphi(t, \alpha) \approx z\alpha.$$

В случае постоянной длины подвеса ($\dot{l} = 0$) z есть решение задачи

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad z(0) = 1, \quad \dot{z}(0) = 0,$$

т.е. $z = \cos \omega t$. Поэтому

$$\varphi(t, \alpha) = \cos \omega t \cdot \alpha + O(\alpha^2) \approx \cos \omega t \cdot \alpha.$$

Линеаризация вблизи верхнего положения равновесия:

$$\varphi(t, 0) \equiv \pi; \quad \varphi(0, \alpha) = \pi + \alpha, \quad \dot{\varphi}(0, \alpha) = 0.$$

Линеаризованная задача:

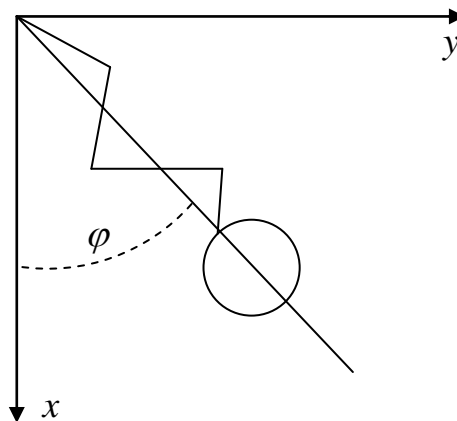
$$\ddot{z} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{z} + \omega^2 \cos \pi \cdot z = 0, \quad z(0) = 1, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

Случай постоянной длины подвеса:

$$\ddot{z} - \omega^2 z = 0, \quad z(0) = 1, \quad \dot{z}(0) = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \Rightarrow$$

$$\varphi(t, \alpha) \approx \pi + \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})\alpha.$$

2.8.3. Пример: маятник с упругим подвесом.



Длина стержня (пружины) в состоянии покоя – l .

Вывод системы уравнений.

Обобщенные координаты:

φ – полярный угол;

u – относительное удлинение пружины.

Выражение радиус-вектора через обобщенные координаты:

$$r = \rho e_\rho = l(1+u) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{m}{2} \dot{r}^2 = \frac{m}{2} (l\dot{u}e_\rho + l(1+u)\dot{\varphi}e_\varphi)^2 = \frac{m}{2} (l^2\dot{u}^2 + l^2(1+u)^2\dot{\varphi}^2).$$

Силы веса F_1 и пружины F_2 :

$$F_1 = mg \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; F_2 = -e_\rho (clu + mg).$$

Производные радиус-вектора по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = l(1+u)e_\varphi; \frac{\partial r}{\partial u} = le_\rho$$

Подготовка к первому уравнению Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2(1+u)^2\dot{\varphi}; \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2ml^2(1+u)\dot{u}\dot{\varphi} + ml^2(1+u)^2\ddot{\varphi}; \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$Q_\varphi = (F_1 + F_2) \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \left(mg \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e_\rho (clu + mg) \right) \cdot l(1+u)e_\varphi = -mgl(1+u)\sin\varphi.$$

Первое уравнение Лагранжа:

$$(1+u)\ddot{\varphi} + 2\dot{u}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Подготовка ко второму уравнению Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = ml^2\dot{u}; \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = ml^2\ddot{u}; \frac{\partial T}{\partial u} = ml^2(1+u)\dot{\varphi}^2;$$

$$Q_u = (F_1 + F_2) \frac{\partial r}{\partial u} = \left(mg \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e_\rho (clu + mg) \right) \cdot le_\rho = mgl\cos\varphi - cl^2u - mgl.$$

Второе уравнение Лагранжа:

$$\ddot{u} - (1+u)\dot{\varphi}^2 + \frac{c}{m}u + \frac{g}{l}(1 - \cos\varphi) = 0.$$

Известное решение – положение равновесия $\varphi = 0, u = 0$. Малое возмущение α прибавляется к углу $\varphi = 0$ и к $u = 0$. Обозначения:

$$x = \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x(t, \alpha) - x(t, 0) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \alpha + o(\alpha),$$

$$z_1(t) = \left. \frac{\partial \varphi(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad z_2(t) = \left. \frac{\partial u(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

Система уравнений малых колебаний получается почленным дифференцированием уравнений исходной системы по α в точке $\alpha = 0$:

$$\ddot{z}_1 + \frac{g}{l} \cos 0 \cdot z_1 = 0,$$

$$\ddot{z}_2 + \frac{c}{m} z_2 = 0.$$

$$z_1(0) = 1, z_2(0) = 1, \dot{z}_1(0) = 0, \dot{z}_2(0) = 0.$$

Линеаризованная система распалась на два не связанных между собой уравнения гармонических осцилляторов с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}:$$

$$z_1 = \cos \omega_1 t, \quad z_2 = \cos \omega_2 t.$$

Таким образом, малые колебания маятника с упругим подвесом описываются приближенными формулами:

$$\tilde{l}(t, \alpha) \approx l(1 + z_2 \alpha) = l(1 + \alpha \cos \omega_2 t), \quad \varphi(t, \alpha) \approx \alpha z_1 = \alpha \cos \omega_1 t.$$

2.9. Относительное движение

2.9.1. Пример: падение камня в глубокий колодец.

Камень падает в глубокий колодец без начальной скорости. Отклонится ли он от вертикали вследствие суточного вращения Земли? Если да, то в какую сторону и насколько?

2.9.2. Дискуссия 1679 г. в Лондонском королевском обществе.

(Цитируется по: В.И. Арнольд. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук...)

2.9.3. Уравнение относительного движения.

Пусть S – инерциальная декартова система отсчета, \tilde{S} – другая декартова система отсчета, относительно которой изучается движение материальной точки.

Воспользовавшись формулой сложения ускорений, можно второй закон Ньютона записать в виде:

$$m(w_{пер} + w_{отн} + w_{кор}) = F.$$

В данной ситуации основной интерес представляет относительное движение, поэтому мы запишем закон движения в форме:

$$mw_{отн} = F + J_{пер} + J_{кор}, \quad (36)$$

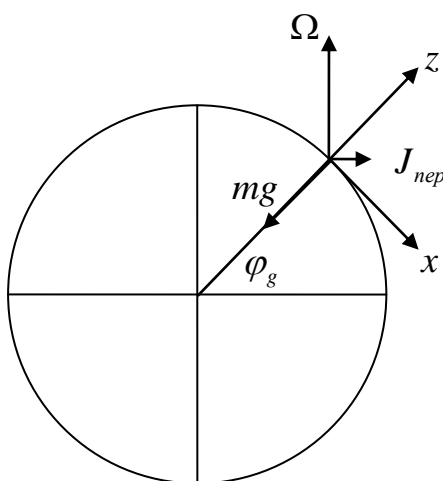
где

$$J_{пер} = -mw_{пер}, \quad J_{кор} = -mw_{кор} -$$

так называемые *силы инерции*, соответственно, переносная и кориолисова. Итак, уравнение движения материальной точки в любой (не обязательно инерциальной) декартовой системе отсчета можно записывать в виде, аналогичном второму закону Ньютона, если к действующей на точку силе добавить силы инерции.

2.9.4. Пример с падением камня в колодец.

В данном случае «относительную» систему отсчета будем для простоты обозначать S (а не \tilde{S}) и выберем ее следующим образом: начало координат в точке отпущения камня, ось Oz направлена **вертикально вверх**, Ox по меридиану



к югу, Oy по параллели на восток. Переносное ускорение – это центростремительное ускорение при вращении Земли вокруг оси, поэтому оно направлено в плоскости zOx ; в этой же плоскости лежит переносная сила инерции $J_{пер}$ (прак-

тически постоянная). Кориолисова сила инерции выражается через вектор угловой скорости Земли и относительную скорость камня. В результате получается следующее уравнение относительного движения:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mge_z - mw_{nep} - 2m[\Omega, \dot{\mathbf{r}}],$$

т.е.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -ge_z - w_{nep} - 2[\Omega, \dot{\mathbf{r}}]. \quad (37)$$

Первые два слагаемых лежат в плоскости меридиана, так что отклонение от этой плоскости может происходить только в направлении третьего слагаемого. Учитывая, что $\dot{\mathbf{r}}$ с большой степенью точности направлено по $(-e_z)$, получаем, что векторное произведение направлено на запад, а сила инерции с учетом знака «минус» – на восток! Ньютон и Гук были оба правы, но оба основывались на ошибочных рассуждениях.

2.9.5. Численный анализ.

Как уже отмечалось, переносное ускорение есть центростремительное ускорение при вращении Земли вокруг оси с угловой скоростью $\omega = |\Omega|$. Период обращения Земли вокруг оси по отношению к звездам равен 23 ч. 56 мин. 4 сек., поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 - 4 \cdot 60 + 4} \approx 7,3 \cdot 10^{-5}.$$

Принимая для радиуса Земли обозначение R , получаем на широте φ :

$$-w_{nep} = R\omega^2 \cos \varphi (e_x \sin \varphi + e_z \cos \varphi).$$

Далее, для силы инерции Кориолиса получаем:

$$-2[\Omega, \dot{\mathbf{r}}] = -2\omega \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = -2\omega (-e_x \dot{y} \sin \varphi - e_y (-\dot{z} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi) - e_z \dot{y} \cos \varphi).$$

В координатах (37) принимает вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= R\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2\omega \dot{y} \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= -2\omega (\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \\ \ddot{z} &= 2\omega \dot{y} \cos \varphi - g + R\omega^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

2.9.6. Метод последовательных приближений.

(В.И. Арнольд, Математические методы..., с.). Система (37) с нулевыми начальными условиями решается методом последовательных приближений.

Нулевое приближение:

$$r_{(0)}(t) = -\frac{gt^2}{2} e_z; \Rightarrow \dot{r}_{(0)}(t) = -gte_z.$$

Первое приближение:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{(1)}(t) &= -ge_z + R\omega^2(e_x \sin \varphi_g + e_z \cos \varphi_g) - 2[\Omega, \dot{r}_{(0)}(t)] \approx -ge_z - 2[\Omega, \dot{r}_{(0)}(t)]; \\ -2[\Omega, \dot{r}_{(0)}(t)] &= 2[\Omega, gte_z] = 2\omega gt \cos \varphi_g e_y. \end{aligned}$$

Дважды интегрируем при нулевых начальных значениях:

$$r_{(1)}(t) = -\frac{gt^2}{2} e_z + g\omega \frac{t^3}{3} \cos \varphi_g e_y.$$

Если $\varphi_g = 60^\circ$ (широта Петербурга) и $t = 7.14$, то второе слагаемое в правой части, соответствующее отклонению камня на восток, равно

$$981 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{(7.14)^3}{3} \frac{1}{2} \approx 4,33.$$

Результат практически совпадает с полученным ранее более точными расчетами.

2.9.7. Маятник Фуко.

Рассмотрим движение сферического маятника на географической широте φ_g с учетом суточного вращения Земли.

Частные случаи.

См. В.И. Арнольд [2], с.113 (118).

Комментарий к тексту из книги В.И. Арнольда.

- 1) Направления осей и величина силы тяжести выбраны с учетом переносной (центробежной) силы инерции (см. рис. в п. 2.9.4).
- 2) Приближенное равенство $\dot{z} = 0$ (и, следовательно, $z = l$) можно интерпретировать следующим образом. Вместо малых колебаний сферического маятника будем рассматривать колебания гармонического осциллятора, распо-

ложенного в (невесомой) запаянной стеклянной трубке, свободно лежащей на воде. Тогда без учета силы Кориолиса движение будет описываться системой

$$\ddot{r} = -\omega^2 r, \text{ т.е. } \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x, \\ \ddot{y} = -\omega^2 y. \end{cases}$$

3) Ускорение Кориолиса на широте λ_0 вычислим по известной формуле:

$$\begin{aligned} w_{\text{кор}} &= 2[\Omega, \dot{r}] = 2|\Omega| \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -\cos \lambda_0 & 0 & \sin \lambda_0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \langle \dot{z} = 0 \rangle = \\ &= 2|\Omega|(-e_x \dot{y} \sin \lambda_0 + e_y \dot{x} \sin \lambda_0 - e_z \dot{y} \cos \lambda_0). \end{aligned}$$

Поэтому с учетом силы Кориолиса система имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + \dot{y} \sin \lambda_0, \\ \ddot{y} = -\omega^2 y - \dot{x} \cos \lambda_0. \end{cases}$$

2.10. О некоторых общих принципах механики

2.10.1. Дедуктивный и индуктивный рост знаний.

В каждой области науки можно выделить два «встречных» направления: дедуктивное – чисто логический вывод новых положений из уже установленных ранее – и индуктивное – построение общих утверждений на основе имеющейся базы частных таким образом, чтобы эта частная база оказывалась логическим следствием найденных общих положений. Первое из этих направлений можно уподобить росту дерева в сторону кроны, второе – в сторону корней. В математике корни принято называть аксиомами, а в прикладных науках – принципами. Характерными чертами научных принципов являются, с одной стороны – возможность логического вывода из них известных и новых частных положений, а с другой – известная доля «риска», связанного с использованием ограниченной базы данных для формулировки неограниченно общего утверждения. В наших лекциях мы уже неоднократно использовали основные положения, которые в литературе называются принципами механики.

2.10.2. Принцип относительности Галилея (в формулировке В.И. Арнольда).

Существуют системы координат (называемые инерциальными), которые обладают следующими двумя свойствами:

- 1) Все законы природы во все моменты времени одинаковы во всех инерциальных системах координат.
- 2) Все системы координат, движущиеся относительно инерциальной равномерно и прямолинейно, инерциальны.

Другие формулировки – см. Кинематика в работе, с. 52.

2.10.3. Принцип детерминированности Ньютона.

Начальное состояние механической системы (т.е. совокупность положений и скоростей всех ее точек в какой-нибудь момент времени) однозначно определяет все ее движение.

Второй закон Ньютона как следствие принципа детерминированности:

$$\ddot{r} = F(t, r, \dot{r}).$$

2.10.4. Принципы Даламбера и Даламбера – Лагранжа.

Принцип Даламбера устанавливает, что уравнения движения системы можно придать вид условий равновесия действующих сил и сил инерции:

$$F_k + J_k = 0, \quad J_k = -m_k w_k.$$

При этом уравнения динамики приобретают вид уравнений *статики* – той части механики, которая занимается изучением условий равновесия (и которая исторически развивалась раньше динамики).

Принцип Даламбера – Лагранжа относится к механическим системам с идеальными связями; он утверждает, что работа сил реакции связей на любых возможных перемещениях равна нулю:

$$\sum_k \left(R_k, \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

(см. (24)). Эквивалентная формулировка:

$$\sum_k \left(m\ddot{r}_k - F_k, \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (i=1, \dots, m) -$$

это запись уравнений движения системы с (идеальными) связями без участия сил реакции связей. *Возможные (виртуальные) перемещения* – это векторы $\frac{\partial r_k}{\partial q_i}$, касательные к многообразию возможных при данных связях положений системы (и их линейные комбинации).

2.10.5. Принцип Гамильтона наименьшего (стационарного) действия.

Функционал *действия* по Гамильтону:

$$\Phi(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt;$$

L – функция Лагранжа. *Вариация* (дифференциал) функционала действия:

$$F_q(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h dt, \quad h(t_0) = h(t_1) = 0.$$

Принцип Гамильтона: *на действительных движениях системы вариация функционала действия есть нулевой линейный функционал, $F_q = 0$.*

В вариационном исчислении доказывается, что равенство $F_q = 0$ эквивалентно тому, что функция L удовлетворяет уравнениям Лагранжа.

2.10.6. Канонические уравнения Гамильтона.

Обобщенный импульс: $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. *Функция Гамильтона:* $H := (T + U)(p, q)$. Урав-

нения консервативной системы можно записать в виде следующей *канонической системы*:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \end{cases}$$

Например, для маятника (см. 2.7.5)

$$q = \varphi, T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2, U = -mgl \cos q, L = T - U,$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q}, H = (T + U)(p, q) = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q.$$

Канонические уравнения маятника:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mgl \sin q, \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2}. \end{cases}$$

2.10.7. О принципе Мопертюи (-Эйлера-Лагранжа-Якоби).

Известны различные варианты «принципа наименьшего действия Гамильтона». Исторически первым был принцип Мопертюи, описание которого можно найти в книге В.И. Арнольда, с.211.

3. Справочные сведения

3.1. Единицы измерения

С 1981 года стандартом рекомендуется использование Международной системы единиц – СИ. Ниже приведены основные и производные единицы этой системы.

3.1.1. Основные.

Длина – метр (м), масса – килограмм (кг), время – секунда (с).

3.1.2. Производные.

Сила – ньютон (Н) = кг · м/с².

Работа, энергия – джоуль (Дж) = Н · м.

Мощность – ватт (Вт) = Дж/с.

3.1.3. Десятичные кратные и дольные единицы.

Множитель	Приставка	Обозначение	Примеры
10 ⁹	гига	G (Г)	гигаватт, ГВт
10 ⁶	мега	M (М)	мегатонна, Мт
10 ³	кило	k (к)	километр, км
10 ²	гекто	h (г)	гектар, га

10	дека	da (да)	декалитр, дал
10^{-1}	деци	d (д)	дециметр, дм
10^{-2}	санци	c (с)	сантиметр, см
10^{-3}	мили	m (м)	миллиметр, мм
10^{-6}	микро	μ (мк)	микрометр (микрон), мкм
10^{-9}	нано	n (н)	нанометр, нм

3.1.4. Традиционно используемы единицы.

Длина – миля (М) = 1852 м (морская),
 = 1609 м (сухопутная, уставная),
 = 7468 м (старая русская);

- астрономическая единица (а.е.) – среднее расстояние от Земли до Солнца $\approx 149,6$ млн. км;
- световой год – путь, который свет проходит за год

$$= 9,46 \cdot 10^{12} \text{ км.}$$

Время – минута (мин) = 60 с;

– час (ч) = 60 мин;

– сутки

солнечные (сут) = 24 ч ,

звездные $\approx (24 \cdot 60 \cdot 60 - 4 \cdot 60 + 4) \text{ с}$

Скорость – узел (У) = морская миля/час = 0,5144 м/с

3.2. Земля

Третья по порядку от Солнца из девяти больших планет Солнечной системы (Меркурий – Венера – Земля – Марс – пояс малых планет (астероидов) – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун – Плутон).

Масса - $5976 \cdot 10^{21} \text{ кг}$ - 1/448 массы всех больших планет – 1/330 000 массы Солнца.

Средний радиус 6371,032 км.

Среднее расстояние до Солнца - 1 астрономическая единица (а.е.) - около 150 млн. км; эллиптическая орбита близка к круговой.

Период обращения вокруг Солнца (промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия – тропи-

ческий год) – 365, 2422 сут (средних солнечных суток); движение происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны Северного полюса мира.

Сидерический год (от лат. sidus - звезда) – период обращения Земли вокруг Солнца по отношению к звездам – 365,2596 сут

Средняя скорость движения по орбите около 30 км/с.

Период движения вместе с Солнцем вокруг центра Галактики – около 200 млн. лет, средняя скорость движения - 220 км/с.

Скорость точек экватора в суточном вращении Земли ~ 465 м/с, на широте φ она умножается на $\cos \varphi$.

3.3. Луна

Среднее расстояние до Земли 384400 км (≈ 6 радиусов Земли).

Наклон орбиты к плоскости эклиптики $5^{\circ}8'43''$.

Масса $7,35 \cdot 10^{22}$ кг (1/81,3 массы Земли).

Средний радиус 1738 км.

Ускорение силы тяжести на поверхности 1,62 м/с².

Сидерический период обращения 27,3 сут. (лат. sidus - звезда) – период обращения по отношению к звездам.

Синодический период обращения 29,5 сут. (греч. sinodos - соединение) - промежуток времени между одинаковыми фазами Луны.

Период обращения Луны вокруг собственной оси равен сидерическому периоду обращения вокруг Земли, поэтому с Земли всегда видна одна сторона Луны.

3.4. Солнечная система

Состоит из Солнца, 9 планет, их спутников, малых планет (астероидов) и их осколков, комет и межпланетной среды.

Планеты в порядке удаления от Солнца: Меркурий ($\approx 0,4$ а.е. от Солнца), Венера, Земля (1 а.е. от Солнца), Марс, область малых планет, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон (≈ 40 а.е. от Солнца).

Масса Солнца $\approx 2 \cdot 10^{30}$ кг $\approx 99,9\%$ массы всей Солнечной системы; диаметр приблизительно в 109 раз больше диаметра Земли.

Солнечная система расположена вблизи плоскости Галактики на расстоянии ≈ 33000 световых лет от ее центра. Скорость вращения вокруг центра ≈ 220 км/с, период обращения ≈ 200 млн. лет.

Зодиакальные созвездия (от греч. «зодиакос» - зверь, «зоон» - животное): Рыбы, Овен, Телец (весна), Близнецы, Рак, Лев (лето), Дева, Весы, Скорпион (осень), Стрелец, Козерог, Водолей (зима). Это созвездия, расположенные в плоскости *эклиптики*, т.е. плоскости земной орбиты.

Возраст Солнечной системы оценивается в 4,6 млрд. лет.

3.5. Краткие сведения об ученых

3.5.1. Аристотель

(384, Стагира во Фракии – 322 до н.э.) – древнегреческий ученый, участник Академии Платона, основатель философской школы в Афинах, оказавший большое влияние на последующее развитие многих наук. Воспитатель Александра Македонского. Среди его многочисленных сочинений 4 трактата были посвящены вопросам физики.

3.5.2. Архимед

(ок. 287 – 212 до н.э.) – древнегреческий ученый, математик и механик. Один из создателей механики как науки. Исследовал распределение нагрузок между опорами балки, определил и изучил понятие центра тяжести, дал математическое описание законов рычага. «Дай мне, где стать, и я сдвину Землю». Заложил основы гидростатики, нашел знаменитый закон, который теперь называется законом Архимеда.

3.5.3. Птолемей

Клавдий (2 в.), древнегреческий ученый. Разработал так называемую геоцентрическую систему мира, согласно которой все видимые движения небесных светил объяснялись их движением (часто очень сложным) вокруг неподвижной Земли. Основное сочинение по астрономии – «Великое математическое построение астрономии в 13 книгах», арабизированное название «Альмагест». Большую часть жизни провел в Александрии, умер около 168 года.

3.5.4. Коперник

Николай (19.2.1473, Торунь – 24.5.1543, Фромборк) – польский астроном и математик, создатель гелиоцентрической системы мира. Основной его труд «Об обращениях небесных сфер» был опубликован в 1543 году, незадолго до смерти автора.

3.5.5. Бруно

Джордано Филиппо (1548, Нола – 17.2.1600, Рим), итальянский философ и поэт, представитель пантеизма. В области астрономии развивал гелиоцентрическую

теорию Н. Коперника, высказывал идеи о бесконечности природы и бесконечном множестве миров Вселенной. Преследуемый церковниками, покинул Италию и жил во Франции, Англии, Германии. По возвращении в Италию (1592) был обвинен в ереси и свободомыслии и после восьмилетнего пребывания в тюрьме сожжен на костре.

3.5.6. Галилей

Галилео (15.2.1564, Пиза – 8.1.1642, Арчетри, близ Флоренции), итальянский физик, механик и астроном, один из основателей естествознания, поэт, филолог и критик. Принадлежал к знатной, но обедневшей флорентийской семье. Образование получил в школе в Пизе, в монастыре Валломброса, по настоянию отца изучал медицину в Пизанском университете. Изучал труды Аристотеля (и отнесся к ним критически), Евклида и Архимеда, последний стал его настоящим учителем. Увлеченный геометрией и механикой, Галилей бросил медицину и вернулся во Флоренцию, где провел 4 года, изучая математику. После первых работ о гидростатических весах и центрах тяжести телесных фигур получил кафедру математики в Пизе (1589), затем занял кафедру математики в Падуе. Падуанский период (1592-1610) – время наивысшего расцвета его деятельности.

Основные труды: «Звездный вестник» (1610-11), «Диалог о двух главнейших системах мира» (1632), «Беседы и математические доказательства, ...» (1638). Первый написан на основе астрономических наблюдений, произведенных с помощью построенного Галилеем телескопа с 32-кратным увеличением, и произвел ошеломляющее впечатление обилием новых интереснейших сведений о Луне, спутниках Юпитера, Млечном Пути. Во втором в форме разговоров трех собеседников излагались системы Коперника и Птолемея. Первоначально разрешенный к изданию папой Урбаном VIII, он вскоре был запрещен и послужил основанием для сурового осуждения Галилея со стороны инквизиции. Третий был написан на вилле Арчетри, под Флоренцией, где осужденный Галилей был вынужден провести последние 9 лет жизни. Эта книга подводит итог физических изысканий Галилея и содержит начала динамики; издана в 1638 году в Голландии.

В 1637 году Галилей ослеп. Умер в 1642 году.

3.5.7. Кеплер

Иоганн (27.12.1571, Вейль-дер-Штадт, Вюртемберг, Швабия – 15.11.1630, Регенсбург, Бавария) – немецкий астроном, открывший законы движения планет. Родился в обедневшей дворянской протестантской семье. Получил образование в монастырской школе, духовной семинарии (бакалавр), Тюбингенской академии (1593, магистр). В академии его частным образом познакомил с гелиоцентрической системой мира Н. Коперника проф. М. Местлин. После академии работал преподава-

телем математики в г. Грац (Австрия). В 1600 году переехал в Прагу к знаменитому астроному Тихо Браге, после смерти которого (1601) получил материалы его многолетних высокоточных наблюдений. Первые два знаменитых закона в применении к Марсу опубликовал в 1609 году в сочинении «Новая астрономия». В 1612 году в сочинении «Гармония Мира» дал формулировку третьего закона. В работе «Сокращение коперниковой астрономии» (ч. 1 – 3, 1618-22) распространил открытые им законы на движение всех планет, Луны и 4 спутников Юпитера. Кеплер опубликовал много книг и статей. Помимо астрономии, он занимался оптикой, геометрией и астрологией (последней главным образом для заработка). Конец жизни Кеплера был омрачен скитаниями и бедностью. При переезде в ноябре 1630 года в Регенсбург заболел и вскоре умер.

3.5.8. Гюйгенс

Христиан (14.4.1629, Гаага – 8.7.1695, там же) – нидерландский механик, физик и математик, создатель волновой теории света. Первый иностранный член Лондонского королевского общества (с 1663), председатель Французской АН (1665-81). Наиболее важные работы: об определении длины дуг окружности, эллипса и гиперболы (ок. 1651), «Об определении величины окружности» (1654), «О расчетах при игре в кости» (1657), установление совместно с Р.Гуком постоянных точек термометра – точки таяния льда и точки кипения воды, усовершенствование объективов астрономических труб и открытие спутника Сатурна Титана (1655) и кольца Сатурна, «Система Сатурна» (1659), изобретение первых маятниковых часов со спусковым механизмом и исследование движений физического маятника, «Маятниковые часы» (1658), работа над созданием «планетной машины» - прообраза современного планетария (1680), «Трактат о свете» (1690) с приложением «О причинах тяжести» (независимо от Ньютона высказана идея закона всемирного тяготения).

3.5.9. Гук

Роберт (18.7.1635, о.Уайт – 3.3.1703, Лондон) – английский естествоиспытатель, член Лондонского королевского общества (1663), В 1653 году поступил в Оксфордский университет, где впоследствии стал ассистентом Р. Бойля. В 1667-83 секретарь Лондонского королевского общества. Построил воздушный насос (1659), совместно с Х. Гюйгенсом установил точки таяния льда и кипения воды (ок. 1660), усовершенствовал барометр, зеркальный телескоп, применил зрительную трубу для измерения углов, сконструировал прибор для определения силы ветра, машину для деления круга и другие приборы. Открыл носящий теперь его имя закон о пропорциональности силы и деформации, предвосхитил закон всемирного тяготения и в 1679 году высказал мнение, что под действием силы, об-

ратно пропорциональной квадрату расстояния, планета должна двигаться по эллипсу. Придерживался волновой теории света и оспаривал корпускулярную. Теплоту считал результатом механического движения частиц вещества. С помощью усовершенствованного им микроскопа наблюдал и зарисовывал клеточное строение растений. Высказывал мысли об истории Земли, изменении земной поверхности и фауны. По его архитектурным проектам построено несколько зданий.

3.5.10. Ньютон

Исаак (4.1.1643, Вулсторп, ок. Грантема – 31.3.1727, Кенсингтон) – английский физик и математик, создавший теоретические основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление, изобретатель зеркального телескопа и автор важнейших экспериментальных работ по оптике.

Родился в семье фермера; отец его умер незадолго до рождения сына. В 1661 году поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета в качестве субсайзера (так назывались бедные студенты, выполнявшие для заработка обязанности слуг в колледже), где с весны 1664 года лекции по математике читал И. Барроу. С весны 1665 по весну 1667, во время эпидемии чумы, находился в своей родной деревне Вулсторп. Эти годы были наиболее продуктивными в научном творчестве Ньютона. В 1668 году Ньютону была присвоена степень магистра, а в 1669 И. Барроу передал ему физико-математическую кафедру, которую Ньютон занимал до 1701 года. В 1687 году Ньютон опубликовал свой грандиозный труд «Математические начала натуральной философии». В 1695 получил должность смотрителя Монетного двора, в том же году избран иностранным членом Парижской АН. В 1705 году за научные труды возведен в дворянское достоинство.

3.5.11. Жуковский

Николай Егорович (5(17).1.1847, с. Орехово, ныне Владимирской обл., – 17.3.1921, Москва) – русский ученый в области механики, основоположник современной гидроаэродинамики, чл.-корр. Петербургской АН. Основные труды по теории авиации, механике твердого тела, гидродинамике, уравнениям с частными производными, приближенному интегрированию дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Айзерман М. А. Классическая механика / М. А. Айзерман.— Изд. 3-е.— М. : Физматлит, 2005.— 378 с.

2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд.— Изд. 5-е.— М. : Едиториал УРСС , 2003.— 416 с.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики : учеб. пособие [для вузов : в 2 ч.]. Ч. 1 : Кинематика, статика, динамика материальной точки / Н.Н. Бухгольц. — Изд. 10-е, стер. — СПб. : Лань, 2009. — 467 с.
4. Маркеев А. П. Теоретическая механика : учебник для студ. механ.-мат. спец. ун-тов / А.П. Маркеев.— Изд. 3-е, испр. — М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001.— 591 с.
5. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике : [учебное пособие для студ. вузов, обуч. по направлениям подготовки и специальностям в области техники и технологий по дисциплине "Теоретическая механика"] / И.В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина .— Изд. 50-е, стер. — СПб. : Лань, 2010 .— 447 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учебное пособие : Т. 2: Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон . — Изд. 9-е, стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2010 .— 638 с.
2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики : В 2 т. : Для студ.вузов, обуч. по техн. специальностям. Т.1: Статика и кинематика.-6-е изд., испр. Т.2: Динамика.-5-е изд., испр. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин .— СПб. : Лань, 2002 .— 729 с.
3. Вильке В. Г. Теоретическая механика : Учебник для студ., обуч. по направлениям "Математика", "Механика", "Механика, приклад. математика", специальностям "Математика", "Механика" / В.Г. Вильке .— 3-е изд., испр. и доп. — СПб. : Лань, 2003 .— 300 с.
4. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики : [Учебное пособие] / В.Ф. Журавлев.— М. : Наука:Физматлит, 1997 .— 320 с.
5. Ньютон Исаак Математические начала натуральной философии / Исаак Ньютон ; Пер. с латин. и коммент. А. Н. Крылова; Под ред. и с предисл. Л. С. Полака; [АН СССР] .— М. : Наука, 1989. 687 с.
6. Ландау Л. Д. Теоретическая физика : В 10 т.: Учеб. пособие для студ. физ. специальностей ун-тов. Т.1: Механика / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц; Под ред.Питаевского Л.П.— 5-е изд.,стер. – М. : Физматлит, 2001 .— 222 с.
7. Павленко Ю. Г. Лекции по теоретической механике : учебник для вузов по специальностям "Механика", "Прикладная математика", "Физика",

- "Астрономия" / Ю. Г. Павленко.— Изд. 2-е, перераб. — М. : Физматлит, 2002.— 391 с.
8. Павловский М. А. Теоретическая механика : Учеб. для техн. вузов / М. А. Павловский, Л. Ю. Акинфиева, О. Ф. Бойчук ; Под общ. ред. д-ра техн. наук проф. М. А. Павловского .— Киев : Выща. шк., 1990 .— 480 с.
 9. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С.М.Тарг. — 15-е изд.,стер. — М.:Высш.шк., 2005. — 415 с.
 10. Цывильский В. Л. Теоретическая механика : Учебник для втузов / В. Л. Цывильский .— М. : Высш. шк., 2001 .— 318 с.
 11. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика : Учебное пособие для студ.вузов, обуч. по техн. специальностям / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова .— 9-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2004.— 763с.
 12. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие для втузов / А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А. А. Яблонского. — Изд. 13-е, стер. — М. : Интеграл-пресс, 2004 .— 382 с.
 13. Теоретическая механика. Терминология. Буквенные обозначения величин: Сборник рекомендуемых терминов. – Вып. 102. – М. : Наука, 1984. – 48с.
 14. Теоретическая механика: Сб.научно-метод.ст. / М-во образования РФ. Научно-метод. совет по теорет.механике. Моск. гос. ун-т им.М.В.Ломоносова, Ин-т механики; Под ред. Ю.Г.Мартыненко. – Вып.25. – М. :Изд-во МГУ, 2004. – 213 с.
 15. Курс теоретической механики : Учебник для вузов по направлению подгот. дипломир. специалистов в обл. техники и технологии / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин и др.; Под ред. К. С. Колесникова .— 3-е изд., стер. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005 .— 735 с.

