И.Н. Прядко, Б.Н. Садовский

ДИНАМИКА 1

Конспекты лекций

Воронеж 2011

Министерство образования Российской Федерации
Воронежский государственный университет

И.Н. Прядко, Б.Н. Садовский

ДИНАМИКА 1

Конспекты лекций

Воронеж 2011

Прядко И.Н., Садовский Б.Н. Динамика 1: *Конспекты лекций* / И.Н. Прядко, Б.Н. Садовский. – Воронеж, 2011. – 38 с.

Учебное пособие написано на основе лекций, читавшихся авторами в разные годы на математическом факультете ВГУ, и предназначено для студентов математических специальностей, изучающих теоретическую механику. Содержание пособия охватывает материал первой части раздела «Динамика» государственного стандарта.

Рекомендовано к изданию Научно-методическим советом математического факультета Воронежского университета, протокол № 0500-01 от 20.01.11.

Рецензент:

заведующий кафедрой уравнений с частными производными и теории вероятностей ВГУ доктор физ.-мат. наук профессор **Глушко А.В.**

Оглавление

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ 3

1.1. Материальная точка, масса, сила 3
1.2. Второй закон Ньютона 3
1.3. Принцип относительности Галилея 4
1.4. Пример: как стрелять, чтобы снаряд улетел подальше 4
1.5. Закон всемирного тяготения 5
1.6. Пример: может ли снаряд вообще не вернуться? 6
1.7. Пример: гармонический осциллятор; закон Гука 7
1.8. Пример: уравнение маятника 8
1.9. Об истории создания основ механики 9

2. МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ 12

2.1. Интеграл энергии и фазовые траектории 12
2.2. Общие свойства фазовых траекторий 12
2.3. Фазовый портрет уравнения снаряда вблизи Земли 13
2.4. Фазовый портрет вертикального полета снаряда на большое расстояние. 14
2.5. Фазовый портрет гармонического осциллятора 14
2.6. Фазовый портрет маятника 15

3. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ И ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА 17

3.1. Центральные силовые поля 17
3.2. Закон сохранения кинетического момента 17
3.3. Уравнения движения в центральном поле 18
3.4. Второй закон Кеплера 19
3.5. Интеграл энергии для уравнения расстояний 20
3.6. Фазовый портрет уравнения расстояний для задачи Кеплера 21
3.7. О круговых орбитах и первой космической скорости 23
3.8. Уравнения орбит и первый закон Кеплера 25
3.9. Третий закон Кеплера 26

4. СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ 28

4.1. Единицы измерения 28
4.1.1. Основные. 28
4.1.2. Производные 28
4.1.3. Десятичные кратные и дольные единицы. 28
4.1.4. Традиционно используемы единицы. 28
4.2. Земля 29

4.3. Луна 29
4.4. Солнечная система 30
4.5. Краткие сведения об ученых 30
4.5.1. Аристотель *30*
4.5.2. Архимед *30*
4.5.3. Птолемей *31*
4.5.4. Коперник *31*
4.5.5. Бруно *31*
4.5.6. Галилей *31*
4.5.7. Кеплер *32*
4.5.8. Гюйгенс *32*
4.5.9. Гук *33*
4.5.10. Ньютон *33*

ЛИТЕРАТУРА 35

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 37

1. Основные понятия и законы динамики

1.1. Материальная точка, масса, сила

Динамика изучает движение *материальных точек,* т.е. отмеченных точек, обладающих *массами,* под действием тех или иных *сил.* Масса характеризует количество материи, составляющей данный «объект относительно малых размеров» (данную материальную точку); она измеряется в *килограммах* (кг) и вблизи поверхности Земли численно совпадает с *весом*, который можно определить с помощью весов. Сила есть векторная характеристика взаимодействия материальных точек. Ее направление и величину можно измерить с помощью *динамометра*; величина силы измеряется в *ньютонах* (Н).

1.2. Второй закон Ньютона

Этот закон, называемый также *основным законом динамики*, определяет ускорение w *материальной точки массы* m при действии на нее *силы* F и выражается формулой:

$$mw = F\,. \tag{1}$$

Закон утверждает, что данное равенство выполняется в любой системе отсчета, которая является *инерциальной*.

Интуитивный смысл условия инерциальности заключается в том, что система отсчета должна быть связана с твердым телом или скоплением твердых тел, обладающим *очень большой* массой. Для многих «земных» экспериментов таким телом можно считать тело Земли, для других (например, точных наблюдений свободного падения тел на разных географических широтах) эта система «недостаточно инерциальна», так как будут наблюдаться небольшие отклонения от вертикали, не согласующиеся со вторым законом Ньютона. Если началом отсчета считать центр Земли, а оси направить на «неподвижные» звезды, то с помощью этого закона отклонения можно будет вычислить с высокой, но все-таки не абсолютной точностью. Можно представить себе эксперименты, для точного объяснения которых понадобится производить измерения по отношению к «еще более» инерциальной системе отсчета – с началом не в центре Земли, а в центре масс всей Солнечной системы, который находится вблизи центра Солнца.

1.3. Принцип относительности Галилея

Инерциальная система отсчета не обязательно должна быть неподвижна относительно «очень массивного тела»; достаточно, чтобы она совершала по отношению к такому телу равномерное и прямолинейное движение. Это утверждает *принцип относительности Галилея*, который в современной формулировке выглядит следующим образом: *любая система отсчета, которая движется относительно инерциальной равномерно и прямолинейно, сама является инерциальной.*

Действие этого принципа мы ощущаем, когда смотрим из вагонного окна на стоящий рядом другой поезд и не можем понять, кто едет – мы или они.

1.4. Пример: как стрелять, чтобы снаряд улетел подальше

Система отсчета S жестко связана с Землей, начало отсчета O совпадает с точкой вылета снаряда, ось Oy направлена вертикально вверх и, следовательно, плоскость Oxz расположена горизонтально, ось Ox выбрана так, что вектор начальной скорости снаряда лежит в плоскости Oxy; обозначим через v_0 величину начальной скорости снаряда и через α угол между вектором начальной скорости и e_x. Требуется найти угол α, при котором дальность полета снаряда будет максимальной.

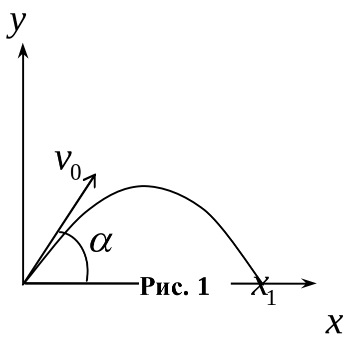

Рис. 1

На снаряд массы m действует направленная вертикально вниз сила тяжести величины mg, где $g \approx 9{,}81(м/с^2)$ – установленное опытами Галилея ускорение свободного падения тела вблизи Земли. По второму закону Ньютона,

$$m\ddot{r} = -mge_y.$$

В координатной записи:

$$\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = -g,\ \ddot{z} = 0.$$

Начальные условия записываются в виде:

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0\cos\alpha,\ \dot{y}(0) = v_0\sin\alpha,\ \dot{z}(0) = 0\ .$$

Двукратным интегрированием получаем закон движения:

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tv_0\cos\alpha \\ -\dfrac{gt^2}{2} + tv_0\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $t_1 -$ момент приземления снаряда, $x_1 = x(t_1) -$ дальность полета. Тогда $y(t_1) = 0$ и, следовательно,

$$-\frac{gt_1^2}{2} + t_1 v_0 \sin\alpha = 0 \;\; (t_1 > 0), \qquad t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Поэтому

$$x_1 = t_1 v_0 \cos\alpha = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \cdot v_0 \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Последняя величина имеет максимальное значение при $\alpha = \pi / 4 -$ это и есть искомый угол.

1.5. Закон всемирного тяготения

При анализе движения снаряда мы считали силу его притяжения к Земле постоянной по величине и направлению. Если рассматриваемые расстояния малы по сравнению с размерами Земли, такое допущение приемлемо. Однако общее описание взаимного притяжения двух материальных точек дается законом всемирного тяготения:

$$F = -G\frac{m_O m}{r^2} e_r.$$

Здесь

$F -$сила, действующая на точку A массы m со стороны точки O массы m_O,

$G = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} (\text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2) -$ *гравитационная постоянная*,

$r = r_{OA}$,

$e_r -$ единичный орт вектора r.

При движении точки A сила F, вообще говоря, меняет величину и направление, однако всегда направлена по вектору $(-e_r)$, т.е. к точке O. Если гравитационная сила F создается центральным телом O и известно «ускорение свободного падения» g на расстоянии R от O,

$$g = \frac{|F|}{m} = G\frac{m_O m}{R^2 m},$$

то $Gm_O = gR^2$, и закон всемирного тяготения можно записать в виде:

$$F = -\frac{mgR^2}{r^2} e_r. \tag{2}$$

В «земных» экспериментах R есть радиус Земли, $g -$ ускорение свободного падения вблизи земной поверхности. Заметим, что закон всемирного тяготения определяет силу притяжения лишь при $r \neq 0$. Практически же формулу (2) мы будем применять при

$$|r| \geq R, \tag{3}$$

считая, что $R > 0$ есть радиус притягивающего тела, внутри которого эта формула перестает быть верной.

1.6. Пример: может ли снаряд вообще не вернуться?

Если снаряд (см. **1.4**) пущен вертикально вверх ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), то его движение по второму закону Ньютона (1) и закону всемирного тяготения в форме (2) будет описываться уравнением:

$$\ddot{y} = -\frac{gR^2}{y^2} \tag{4}$$

(начало координат в данном случае помещено в центр Земли). Если снаряд не удаляется от Земли на большое расстояние, то $y \approx R$ и уравнение (4) практически совпадает с уравнением для координаты y в **1.4,** однако на большом расстоянии от Земли разница между y и R начинает играть существенную роль: сила притяжения заметно уменьшается.

Умножив обе части (4) на $\dot{y}$ и затем проинтегрировав по t, получим следующий первый интеграл:

$$\frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{gR^2}{y} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{gR^2}{y(0)} = \frac{v_0^2}{2} - gR \tag{5}$$

(считаем, что $y(0) = R$). Если начальная скорость такова, что правая часть неотрицательна, то скорость снаряда будет все время оставаться положительной, так как если она в какой-то момент примет нулевое значение, то в этот момент должно быть

$$-\frac{gR^2}{y} \geq 0,$$

что невозможно. Итак, скорость снаряда будет всегда оставаться положительной, т.е. снаряд будет постоянно удаляться от Земли. Для этого, как мы выяснили, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{v_0^2}{2} - gR \geq 0, \text{ т.е. } v_0 \geq \sqrt{2gR} \approx 11{,}2 \textit{ км/с}.$$

Найденная величина называется *второй космической скоростью*. Она обеспечивает невозвращение снаряда на Землю при условии, что он испытывает только притяжение Земли. На самом деле при значительном удалении от Земли основную роль начинает играть притяжение Солнца. Для того чтобы снаряд навсегда покинул Солнечную систему начальная скорость должна быть больше – не менее 16,6 *км/с* (*третья космическая скорость*).

Заметим, что уравнение (5) можно проинтегрировать, так как оно сводится к совокупности двух уравнений с разделяющимися переменными; однако для ответа на поставленный вопрос в этом нет необходимости.

1.7. Пример: гармонический осциллятор; закон Гука

По гладкому горизонтальному стержню движется грузик, удерживаемый с двух сторон пружинами. Уравнение движения можно вывести из второго закона Ньютона, если учесть, что на грузик действуют три силы: вес грузика, направленный вертикально вниз, реакция стержня, направленная вертикально вверх и по величине равная весу, и упругая сила пружин. Одновременное действие на материальную точку нескольких сил эквивалентно действию их суммы, определяемой обычным правилом сложения векторов – это еще один фундаментальный принцип механики. Поэтому грузик движется под действием одной только упругой силы пружин. Упругая сила определяется законом Гука: она пропорциональна отклонению груза от положения равновесия и направлена к этому положению.

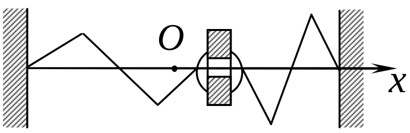

Рис. 2

Выберем декартову систему координат так, что начало отсчета O расположено на стержне в точке равновесия пружин, а ось Ox направлена вдоль стержня. Тогда второй закон Ньютона и закон Гука дают следующее уравнение:

$$m\ddot{x} = -kx\,. \tag{6}$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности из закона Гука, который называется *жесткостью пружины* (в данном случае это суммарная жесткость двух пружин). Введя обозначение $\omega = \sqrt{k/m}$, запишем (6) в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,. \tag{7}$$

Как известно, общее решение последнего уравнения дается формулой:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\,. \tag{8}$$

Коэффициенты C_1, C_2 однозначно определяются начальным положением и начальной скоростью грузика.

Таким образом, уравнение (7) описывает всевозможные *гармонические колебания* (8) *круговой частоты* ω, которые иногда удобно представлять в виде:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi_0),\ A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},\ \cos\varphi_0 = \frac{C_1}{A},\ \sin\varphi_0 = \frac{C_2}{A}. \qquad (9)$$

(при $A = 0$ *начальная фаза* φ_0 не определена и не влияет на x). Период T решения не зависит от амплитуды A: $T = 2\pi/\omega$ - это явление называется *изохронностью колебаний.*

1.8. Пример: уравнение маятника

Невесомый стержень OA длины l свободно вращается в неподвижной вертикальной плоскости вокруг (неподвижной) точки O, точка A несет груз массы m. Требуется найти уравнение движения груза.

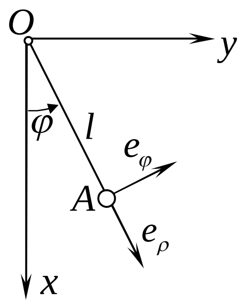

Рис. 3

Выберем декартову систему координат так, как показано на рисунке, и в плоскости xOy введем полярные координаты ρ, φ. На груз A действует сила тяжести mge_x и направленная вдоль стержня сила реакции связи $R \cdot e_\rho$. По второму закону Ньютона,

$$m\ddot{r} = mge_x + R \cdot e_\rho. \qquad (10)$$

Выразим $\ddot{r}$ в полярных координатах:

$$r = le_\rho,\ \dot{r} = l\dot{\varphi}e_\varphi,\ \ddot{r} = l\ddot{\varphi}e_\varphi - l\dot{\varphi}^2 e_\rho.$$

Тогда (10) запишется в виде:

$$ml\ddot{\varphi}e_\varphi - ml\dot{\varphi}^2 e_\rho = mge_x + R \cdot e_\rho.$$

Обе части полученного уравнения умножим скалярно на e_φ; учитывая, что

$$(e_\rho, e_\varphi) = 0,\ (e_x, e_\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = -\sin\varphi,$$

получим уравнение, описывающее изменение угла φ:

$$ml\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0.$$

Разделим обе части на ml и введем обозначение $\omega = \sqrt{g/l}$; окончательно уравнение маятника запишется в виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0. \qquad (11)$$

Если при малом φ заменить $\sin\varphi$ на эквивалентную бесконечно малую величину φ, то получится *уравнение малых колебаний маятника* $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$, которое отличается от уравнения гармонического осциллятора только обозначением переменной (разумеется, это уравнение описывает колебания маятника малой амплитуды лишь приближенно). Малые колебания маятника, как и колебания гармонического осциллятора, изохронны – это свойство вообще характерно для колебаний, описываемых линейными уравнениями. Подчеркнем, однако, что в уравнении гармонического осциллятора величина ω зависит от m, а в уравнении маятника – нет.

1.9. Об истории создания основ механики

Человеческие знания в области механики зародились за несколько тысяч лет до нашей эры, только фиксировались они в те времена не в научных трактатах, а в величественных конструкциях храмов и дворцов. Впрочем, трактаты, возможно, и писались, но просто не дошли до нас.

С 4 века до нашей эры до 17 столетия наиболее авторитетными в области механики были натурфилософские сочинения Аристотеля. Он владел началами статики, он ввел в науку сам термин «Механика». Некоторые его воззрения в области динамики были ошибочны, а ошибки такого авторитетного философа долгое время сковывали инициативу новых поколений ученых. Например, он не знал о возможности движения по инерции, считая, что перемещение тел невозможно без наличия вынуждающей силы; он считал также, что скорость падения тел пропорциональна их массе. Разрушение этих «интуитивно очевидных», но ошибочных убеждений ждало своего времени около двух тысяч лет. Научные основы статики (в частности, строгую теорию рычага) разработал Архимед в 3 веке до нашей эры.

Сложные задачи кинематики решил Птолемей (2 в. нашей эры) в связи с построением и совершенствованием геоцентрической системы мира. Мы знаем, какую отрицательную роль сыграла эта замечательная теория в истории развития научного мировоззрения, но кинематика здесь, конечно, не причем. С точки зрения кинематики утверждения «Земля вращается вокруг Солнца» и «Солнце вращается вокруг Земли» оба лишены смысла, если не определена система отсчета, относительно которой рассматривается движение. Каждое из них является истинным при подходящем выборе этой системы: первое – если система жестко связана с центром Солнца и направлениями на выбранные звезды («гелиоцентрическая»), второе – при том же выборе направлений осей, но с началом в центре Земли («геоцентрическая»). В обоих случаях период вращения равен году. Можно «заставить» Солнце вращаться вокруг Земли значительно быстрей, с периодом в одни сутки, если всю систему отсчета жестко связать с телом Земли. Можно считать, что Земля совершает прямолинейные колебания сравнительно небольшой амплитуды, если началом системы отсчета считать центр Солнца, а одну из осей направить через центр Земли.

С чем же тогда были связаны острые, порой драматические дискуссии о геоцентрической и гелиоцентрической системах? Дело в том, что гелиоцентрическая система из всех перечисленных «наиболее инерциальна», поэтому в ней основной закон механики выполняется с наибольшей точностью и ее естественней всего считать «неподвижной». В этой системе проще выглядят и орбиты других планет Солнечной системы – это эллипсы, в то время как Птолемею в его геоцентрической системе пришлось их описывать в виде сложной системы «эпициклов».

Создание научных основ динамики в 16-17 веках в значительной степени стимулировалось именно исследованием движений планет Солнечной системы. В 1543 году выходит в свет знаменитое сочинение Николая Коперника «Об обращении небесных сфер», утверждающее гелиоцентрическую систему мира. Иоганн Кеплер в сочинениях 1609-1622 года описал 3 основных закона движения планет, найденные им на основе кропотливой многолетней обработки астрономических наблюдений. В 1600 году был сожжен на костре итальянский философ и поэт Джордано Бруно, одним из «грехов» которого инквизиция считала приверженность к учению Коперника. В 1616 году декретом инквизиции книга Коперника была внесена «впредь до исправления» в «Индекс запрещенных книг» и оставалась под запретом до 1828 года. Галилео Галилей последние 9 лет своей жизни официально считался «узником инквизиции» за пропаганду и развитие идей Коперника.

Один из основателей современного естествознания Галилей в области механики знаменит открытием двух фундаментальных законов – принципа относительности, современная формулировка которого приведена в **1.3**, и закона инерции, который утверждает, что при отсутствии внешних сил материальная точка сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения. Закон инерции опровергает заблуждение, идущее от Аристотеля. Еще одна ошибка древнегреческого ученого была исправлена Галилеем с помощью серии экспериментов по наблюдению за движением грузиков, бросаемых с вершины Пизанской башни: масса грузика вовсе не влияет на движение (если его форма не создает значительного сопротивления воздуха), грузики летят с одинаковым ускорением 9,81 м/с^2! Эти эксперименты естественно подводили и к основному закону механики, и к закону всемирного тяготения, и к идее о том, что плодотворное развитие физики невозможно только на основе абстрактных умозрительных заключений.

Современник Галилея Рене Декарт в основу исследований по механике положил закон инерции и высказанный им закон сохранения количества движения; он же ввел понятие импульса силы.

Голландский ученый Х. Гюйгенс изучил движение точки по окружности, исследовал колебания физического маятника, описал законы упругого соударения. Он ввел понятия центростремительной и центробежной силы и рассматривал характеристику твердого тела, которую впоследствии Л. Эйлер назвал моментом инерции; применял принцип, по существу эквивалентный закону сохранения механической энергии.

Весьма разносторонний английский ученый Р. Гук в области механики известен как автор закона о зависимости деформации упругого тела от силы. Он сыграл также важную роль в математическом обосновании найденных И. Кеплером законов движения планет и в выработке закона всемирного тяготения.

Итогом начального периода развития современной механики стал фундаментальный труд И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» (1687). Завершив исследования своих предшественников, Ньютон обобщил понятие силы, ввел понятие массы и сформулировал три основных закона механического движения в следующей форме.

Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

Исходя из этих законов (аксиом), Ньютон решает ряд принципиальных задач о движении тел: выводит из первого и третьего законов Кеплера утверждение об обратной пропорциональности центральной силы квадрату расстояния, доказывает первый закон Кеплера для такой силы, в различных предположениях находит силы по данной орбите и орбиты по заданной силе. На основе анализа ряда известных к тому времени «явлений», относящихся к движению спутников Юпитера и Сатурна, планет Солнечной системы, вращения Луны вокруг Земли, Ньютон формулирует общее утверждение о взаимном притяжении любых тел с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния – то, что мы называем сегодня законом всемирного тяготения.

2. Метод фазовой плоскости

2.1. Интеграл энергии и фазовые траектории

Уравнение маятника (11) представляет собой скалярное дифференциальное уравнение второго порядка с одной скалярной неизвестной функцией, не содержащее первой производной. Механическую систему, описываемую таким уравнением, называют *системой с одной степенью свободы*. В общем случае ее уравнение запишем в виде:

$$\ddot{x} = f\left(x\right). \tag{12}$$

Рассмотренные в пунктах **1.4**, **1.6**, **1.7**, **1.8** механические системы либо сами являются системами с одной степенью свободы, либо в определенном смысле к ним сводятся. Будем предполагать, что функция $f(x)$ непрерывна; пусть $U(x)$ – одна из первообразных для $\left(-f(x)\right)$. С помощью приема, уже использованного в п. **1.6**, понизим порядок уравнения:

$$(12) \;\Rightarrow\; \ddot{x}\dot{x} = f(x)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{d}{dt}U(x) \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U\left(x\right) = E. \tag{13}$$

Члены последнего уравнения имеют следующие наименования: $\dot{x}^2/2$ – *кинетическая энергия*, $U(x)$ – *потенциальная энергия* (определяемая с точностью до постоянного слагаемого), константа интегрирования E – *полная энергия*. Равенство (13) выражает *закон сохранения энергии* для систем с одной степенью свободы. Геометрически оно представляет уравнение семейства кривых в плоскости $(x, \dot{x})$, которые называются *фазовыми траекториями* уравнения (12). Фазовые траектории не дают полного представления о зависимости x от t, но несут в себе важную наглядную информацию о характере этой зависимости. Совокупность фазовых кривых уравнения (12) называют его *фазовым портретом*.

2.2. Общие свойства фазовых траекторий

Уравнение фазовых траекторий (13) сводится к совокупности двух уравнений

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2\left(E - U(x)\right)}, \tag{14}$$

представляющих явное выражение $\dot{x}$ через x. Из этого представления вытекают следующие свойства.

1) При заданном уровне E полной энергии фазовая траектория лежит в полосе $(x,\dot{x})$-плоскости, выделяемой неравенством

$$U(x) \le E. \tag{15}$$

2) Любая фазовая траектория состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси x. По верхней ветви ($\dot{x} > 0$) фазовая точка движется с ростом времени вправо, по нижней – влево.

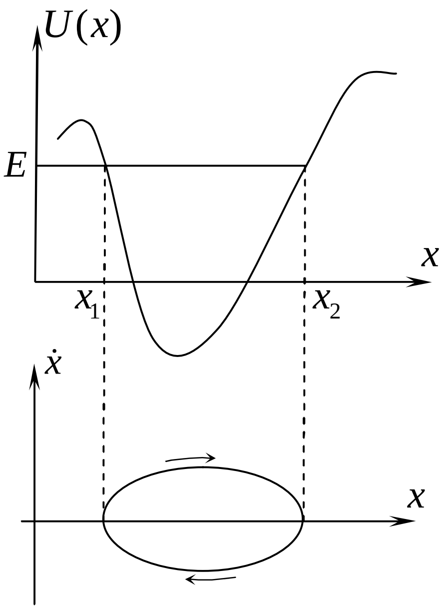

Рис. 4

3) Если $x_1 \le x_2$ и на $[x_1, x_2]$ выполнено (15), то время $T(x_1, x_2)$, за которое решение уравнения (12) переходит от значения x_1 к значению x_2, определяется интегралом

$$T(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - U(x)\right)}} \tag{16}$$

(таких решений бесконечно много, но все они отличаются друг от друга только сдвигами вдоль оси времени). Этот же интеграл определяет время перехода от x_2 к x_1. Отметим, что время может оказаться бесконечным, если знаменатель в (16) не является строго положительной функцией и несобственный интеграл (16) расходится.

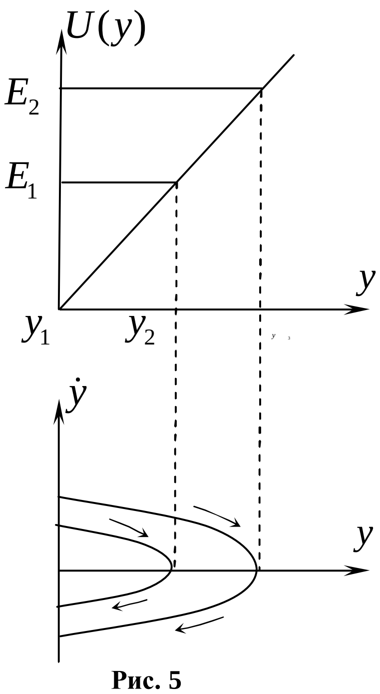

Рис. 5

4) Если в условиях предыдущего свойства $U(x_1) = U(x_2) = E$ и интеграл в (16) сходится, то начальные условия $x(0) = x_1,\ \dot{x}(0) = 0$ определяют периодическое решение с периодом

$$T = 2T(x_1, x_2) = \sqrt{2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \tag{17}$$

2.3. Фазовый портрет уравнения снаряда вблизи Земли

Основную роль при исследовании движения снаряда вблизи Земли в п. **1.4** играло уравнение $\ddot{y} = -g$. Оно, очевидно, относится к типу (12)). В качестве потенциальной энергии возьмем функцию $U(y) = gy$: очевидно, $\left(-U(y)\right)' = -g = f(y)$. Интеграл энергии (13) записывается в виде:

$$\frac{\dot{y}^2}{2} + gy = E\,.$$

2.4. Фазовый портрет вертикального полета снаряда на большое расстояние.

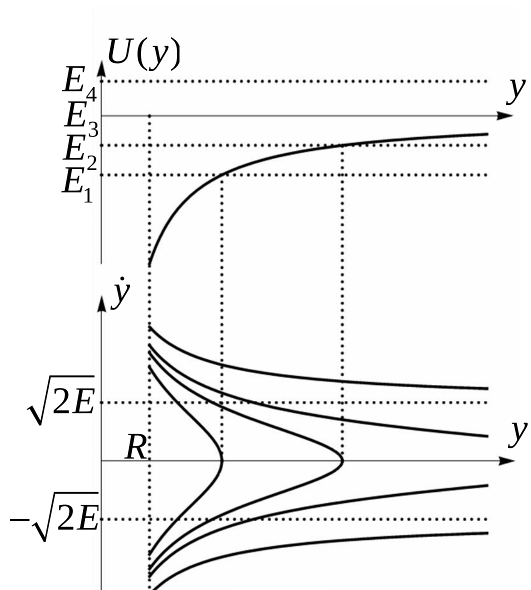

Рис. 6

Движение описывается уравнением (см. (4))

$$\ddot{y} = f(y) = -\frac{gR^2}{y^2}\,.$$

В качестве потенциальной энергии возьмем функцию

$$U(y) = -\frac{gR^2}{y}\,.$$

Фазовые траектории показаны на рисунке.

Минимальный уровень полной энергии, обеспечивающий неограниченность траектории, равен нулю.

2.5. Фазовый портрет гармонического осциллятора.

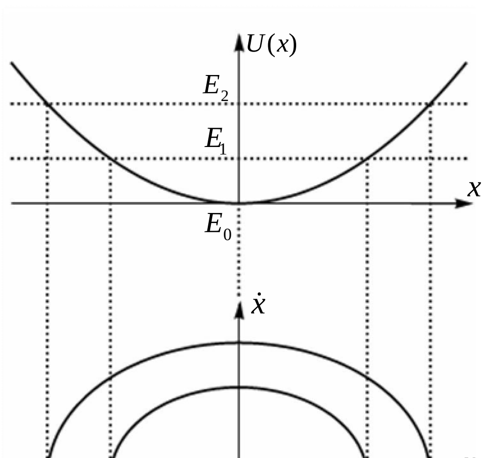

Рис. 7

В этом случае (см. (6)) $f(x) = -\dfrac{k}{m}x = -\omega^2 x$; возьмем $U(x) = \omega^2 x^2 / 2$. Уравнение фазовых траекторий (13) имеет вид:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = E\,.$$

Оно описывает семейство эллипсов с центром в начале координат, полуоси которых возрастают пропорционально $\sqrt{E}$. Все решения являются периодическими с периодом

$$T = \sqrt{2}\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - \dfrac{\omega^2 x^2}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{E}}\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega^2 x^2}{2E}}}\,.$$

При этом

$$x_{\min,\max} = \mp\frac{\sqrt{2E}}{\omega}.$$

Произведем замену переменной:

$$\frac{\omega x}{\sqrt{2E}} = u \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2E}u}{\omega}.$$

Тогда

$$x = x_{\min} \Leftrightarrow u = -1; \quad x = x_{\max} \Leftrightarrow u = 1.$$

Поэтому

$$T = \frac{2\sqrt{E}}{\omega\sqrt{E}}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Результат, разумеется, совпадает с найденным в конце п. **1.7**.

2.6. Фазовый портрет маятника

Для уравнения маятника (11) интеграл энергии можно записать в виде:

$$\frac{\dot\varphi^2}{2} - \omega^2\cos\varphi = E.$$

Это уравнение определяет фазовые траектории четырех следующих типов.

1) При $E = -\omega^2$ – совокупность точек, соответствующих нижнему (устойчивому) положению равновесия маятника: $\varphi = 2k\pi,\ \dot\varphi = 0$.
2) При $-\omega^2 < E < \omega^2$ – множество замкнутых траекторий
$$\dot\varphi = \pm\sqrt{2(E+\omega^2\cos\varphi)}$$
описывающих раскачивание маятника в пределах от $\varphi_{\min} = 2k\pi - \arccos\left(\frac{-E}{\omega^2}\right)$ до $\varphi_{\max} = 2k\pi + \arccos\left(\frac{-E}{\omega^2}\right)$.
3) При $E = \omega^2$ – совокупность точек $\varphi = (2k+1)\pi,\ \dot\varphi = 0$, соответствующих верхнему (неустойчивому) положению равновесия маятника, и семейство пар незамкнутых траекторий, $\dot\varphi = \pm\omega\sqrt{2(1+\cos\varphi)}$ $\left((2k-1)\pi < \varphi < (2k+1)\pi\right)$.
4) При $E > \omega^2$ – семейство пар незамкнутых траекторий:
$$\dot\varphi = \pm\sqrt{2(E+\omega^2\cos\varphi)}\ (-\infty < \varphi < +\infty).$$

Они соответствуют бесконечному вращению маятника в ту или иную сторону.

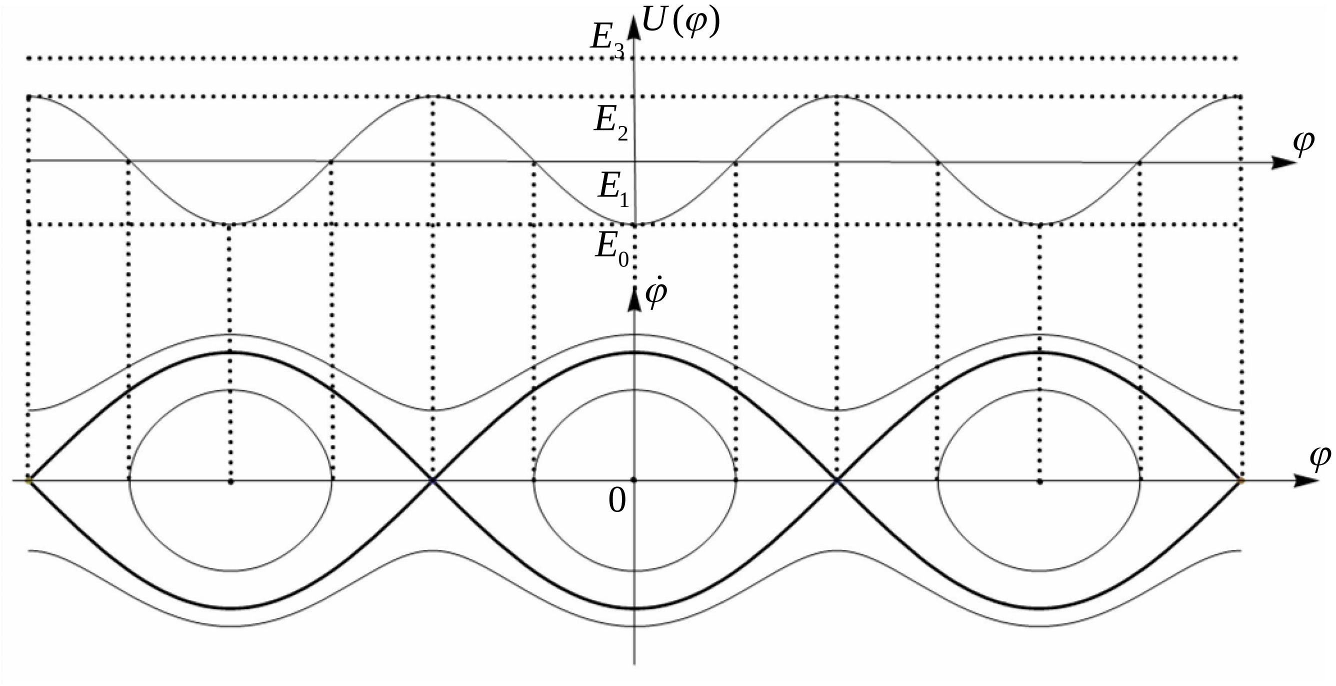

Рис. 8

При $E < \omega^2$ соответствующие решения периодичны. Период определяется формулой (см. (17)):

$$T = \sqrt{2} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{E + \omega^2 \cos\varphi}}.$$

3. Движение в центральном поле и законы Кеплера

3.1. Центральные силовые поля

В соответствии с законом всемирного тяготения (см. **1.5**) материальная точка O массы m_O создает вокруг себя *гравитационное (ньютоново) силовое поле*, т.е. воздействует на любую другую материальную точку A массы m с силой

$$F = -\frac{km}{r^2}e_r,\ r = r_{OA},\ e_{\bar{r}} = \frac{r}{|r|},\ k = Gm_O = gR^2. \tag{18}$$

Если точка O обладает электрическим зарядом Q, то она создает вокруг себя *электрическое (кулоново) силовое поле,* которое действует на точку A, несущую заряд q, с силой

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\frac{Qq}{r^2}e_r; \tag{19}$$

константа ε_a, называемая *абсолютной диэлектрической проницаемостью,* характеризует свойства среды, в которой происходит взаимодействие. В отличие от силы Ньютона, последняя сила может быть не только притягивающей (при $Qq < 0$), но и отталкивающей ($Qq > 0$).

Ньютоново и кулоново силовые поля являются важнейшими примерами *центральных* силовых полей, которые в общем случае описываются формулой

$$F = f_O(|r|)e_r; \tag{20}$$

в это понятие мы будем включать требование, чтобы *центральная точка поля* O была неподвижна в какой-нибудь инерциальной системе отсчета.

3.2. Закон сохранения кинетического момента

Для материальной точки A массы m определим две динамические характеристики: *импульс*, или *количество движения* p и *момент импульса*, или *кинетический момент* M *относительно отмеченной точки* O:

$$p := mv, \qquad M := [r, p] \quad (r = r_{OA}).$$

Утверждается, что *при движении в центральном поле кинетический момент точки относительно центра поля O сохраняет постоянное значение.*

⊳ Действительно, пусть $S-$ инерциальная декартова система отсчета с началом в центре поля O, которая существует в силу определения центрального поля. Тогда в координатах относительно S получим:

$$\dot{M}=[\dot{r},p]+[r,\dot{p}]=[v,mv]+[r,mw]=0+[r,F]=\left[r,f_O(|r|)e_r\right]=0.$$

Следовательно, $M=const$. ⊲

Отметим важное **следствие.** *Траектория материальной точки в центральном поле целиком лежит в подпространстве, ортогональном постоянному вектору* M .

⊳ Действительно, в любой момент времени $M=[r,p]\perp r$. ⊲

3.3. Уравнения движения в центральном поле

По второму закону Ньютона движение материальной точки в центральном поле (20) описывается (в инерциальной декартовой системе отсчета с началом в O) уравнением

$$m\ddot{r}=f_O\left(|r|\right)e_r.$$

Введя обозначение $f\left(|r|\right)=\dfrac{1}{m}f_O\left(|r|\right)$, запишем это уравнение в виде:

$$\ddot{r}=f\left(|r|\right)e_r. \tag{21}$$

Будем рассматривать *двумерное* движение, т.е. будем предполагать, что векторы $r_0=r(0)$ и $v_0=v(0)$ не коллинеарны. В таком случае кинетический момент $M=[r_0,mv_0]$ отличен от нуля и ортогонален векторам r_0,v_0. Будем предполагать, что ось Oz декартовой системы отсчета S, относительно которой изучается движение, направлена по вектору M :

$$e_z=\frac{M}{|M|}=e_z. \tag{22}$$

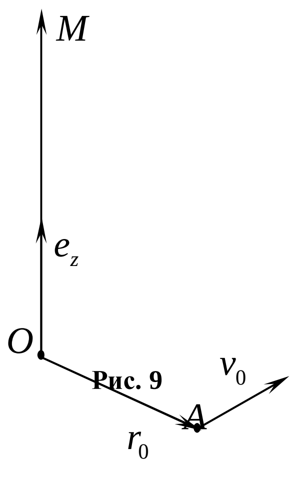

Рис. 9

Направление двух других осей в плоскости, перпендикулярной e_z, пока не конкретизируем. В силу следствия из закона сохранения кинетического момента все движение происходит в плоскости xOy. Введем в этой плоскости полярные координаты (ρ,φ); тогда

$$e_r=e_\rho,\ |r|=\rho,\ r=\rho e_\rho,\ \dot{r}=\dot{\rho}e_\rho+\rho\dot{\varphi}e_\varphi,$$
$$\ddot{r}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)e_\rho+\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\right)e_\varphi.$$

Умножив обе части уравнения (21) скалярно на e_ρ, получим:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = f(\rho). \tag{23}$$

Кинетический момент M записывается в виде:

$$M = \left[\rho e_\rho, m\left(\dot{\rho} e_\rho + \rho\dot{\varphi} e_\varphi\right)\right] = \rho^2 m\dot{\varphi} e_z .$$

Введя обозначение $|M|/m =: \mu$, получаем уравнение:

$$\rho^2\dot{\varphi} = \mu = const . \tag{24}$$

Оно позволяет выразить $\dot{\varphi}$ через ρ:

$$\dot{\varphi} = \frac{\mu}{\rho^2}. \tag{25}$$

Отметим, что угловая скорость оказывается положительной – это следствие нашего выбора направления оси Oz. Подставив это выражение в (23), получим уравнение, описывающее изменение расстояния движущейся точки от центра поля:

$$\ddot{\rho} - \frac{\mu^2}{\rho^3} = f(\rho). \tag{26}$$

Итак, движение в центральном поле описывается уравнениями (25), (26), причем последнее уравнение относится к типу (12) и может быть исследовано методами, описанными в параграфе **2**.

3.4. Второй закон Кеплера

Уравнение (24) допускает простую геометрическую трактовку. Обозначим через $\sigma = \sigma(t)$ площадь, «заметенную» радиус-вектором r точки A за время t. Скорость $\dot{\sigma}$ изменения этой площади называется *секториальной,* или *секторной скоростью спутника. Оказывается, что*

$$\dot{\sigma} = \frac{\rho^2\dot{\varphi}}{2} \quad \left(= \frac{\mu}{2}\right). \tag{27}$$

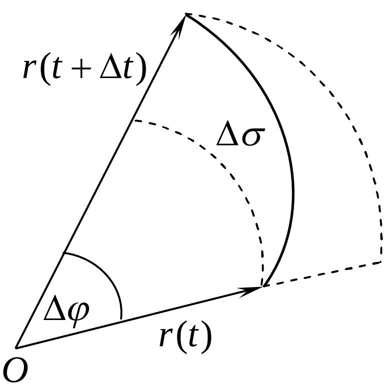

Рис. 10

▷ Действительно, приращение $\Delta\sigma = \sigma(t+\Delta t) - \sigma(t)$ есть площадь криволинейного сектора, которую мы сравним с площадями вписанного и описанного круговых секторов:

$$\frac{\rho_{\min}^2 \Delta\varphi}{2} \le \Delta\sigma \le \frac{\rho_{\max}^2 \Delta\varphi}{2}.$$

Здесь $\rho_{\min}, \rho_{\max}$ - минимальное и максимальное значения ρ за время от t до $t+\Delta t$. Разделив все части этих неравенств на $\Delta t > 0$ и перейдя к пределу при

$\Delta t \to 0$, получим (27). $\lhd$

В такой трактовке соотношение (24) в применении к планетам Солнечной системы выражает один из трех знаменитых законов Кеплера: *секториальные скорости планет постоянны.*

Иоганн Кеплер вывел этот закон сначала для Марса на основе анализа таблиц движения этой планеты, составленных датским астрономом Тихо Браге. Вместе с первым законом (о форме орбиты Марса) он был опубликован в книге «Новая астрономия» в 1609 году. Позже оба закона были обобщены на все планеты.

3.5. Интеграл энергии для уравнения расстояний

Для уравнения расстояний (26) найдем интеграл энергии. Потенциальная энергия для этого уравнения по отношению к исходному уравнению (21) называется *эффективной*; будем обозначать ее $U_{эфф}$. Роль $f(x)$ из (12) в данном случае играет функция

$$\frac{\mu^2}{\rho^3} + f(\rho),$$

поэтому

$$U_{эфф} = -\int_0 \left(\frac{\mu^2}{\rho^3} + f(\rho) \right) d\rho = \frac{\mu^2}{2\rho^2} + u(\rho).$$

Ноль под знаком интеграла означает выбор одной из первообразных; $u(\rho) -$ первообразная для $\left(-f(\rho)\right)$. Итак, из (26) следует уравнение

$$\frac{\dot{\rho}^2}{2} = E - U_{эфф} \equiv E - \frac{\mu^2}{2\rho^2} - u(\rho). \tag{28}$$

Движение планет и комет вокруг Солнца, а также любых «спутников» Земли и других массивных космических тел описывается уравнением

$$m\ddot{r} = -\frac{km}{r^2} e_r \Leftrightarrow \ddot{r} = -\frac{k}{r^2} e_r .$$

Исследование таких движений называется *задачей Кеплера*. В этой задаче

$$f(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}$$

и уравнение расстояний (26) имеет вид

$$\ddot{\rho} - \frac{\mu^2}{\rho^3} = -\frac{k}{\rho^2}. \tag{29}$$

Поэтому в качестве $u(\rho)$ в (28) можно взять $-\dfrac{k}{\rho}$, так что эффективная потенциальная энергия запишется в виде:

$$U_{эфф} = \frac{\mu^2}{2\rho^2} - \frac{k}{\rho}.$$

Преобразуем это выражение к более удобному виду:

$$U_{эфф} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\rho^2} - 2\frac{\mu}{\rho}\frac{k}{\mu} + \frac{k^2}{\mu^2}\right) - \frac{k^2}{2\mu^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{k}{\mu}\right)^2 - \frac{k^2}{2\mu^2}.$$

В таком представлении очевидно, что эта функция принимает минимальное значение при

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{k}{\mu},\ т.е.\ \rho = \frac{\mu^2}{k} = (обозн.) = p,$$

причем это минимальное значение равно

$$-\frac{k^2}{2\mu^2} = -\frac{k}{2p} = (обозн.) = E_{кр}.$$

Смысл этого обозначения заключается в том, что при таком уровне полной энергии E спутник движется по круговой орбите (см. пункт **3.7**).

Заметим еще, что при $\rho < p$ величина $U_{эфф}$ строго убывает:

$$U'_{эфф} = -\frac{\mu}{\rho^2}\left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{k}{\mu}\right) < 0 \ \ при\ \ \rho < p,$$

а при $\rho > p$ строго возрастает, причем

$$\lim_{\rho\to+0} U_{эфф} = +\infty,\ \ \lim_{\rho\to+\infty} U_{эфф} = 0.$$

3.6. Фазовый портрет уравнения расстояний для задачи Кеплера

С учетом произведенных преобразований интеграл энергии (28) для уравнения расстояний в задаче Кеплера можно записать в виде:

$$\dot{\rho}^2 = 2\left(E - E_{кр}\right) - \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{k}{\mu}\right)^2. \tag{30}$$

Область изменения ρ описывается неравенством:

$$\left|\frac{\mu}{\rho} - \frac{k}{\mu}\right| \le \sqrt{2\left(E - E_{кр}\right)},$$

т.е.

$$\frac{k}{\mu}-\sqrt{2\left(E-E_{кр}\right)}\le\frac{\mu}{\rho}\le\frac{k}{\mu}+\sqrt{2\left(E-E_{кр}\right)}.$$

Умножив все части последних неравенств на μ / k, получим:

$$1-\varepsilon\le\frac{p}{\rho}\le1+\varepsilon,\ \varepsilon:=\frac{\mu}{k}\sqrt{2\left(E-E_{кр}\right)}. \tag{31}$$

В зависимости от величины полной энергии E фазовые кривые могут быть следующих трех типов. 1) При $E=E_{кр}$ $(\varepsilon=0)$ фазовая траектория состоит из одной точки $(p,0)$, что соответствует движению спутника по окружности радиуса p.

Если $E>E_{кр}$ $(\varepsilon>0)$, то траектория состоит из двух ветвей:

$$\dot{\rho}=\pm\sqrt{2\left(E-E_{кр}\right)-\left(\frac{\mu}{\rho}-\frac{k}{\mu}\right)^2}. \tag{32}$$

2) При $E_{кр}<E<0$ траектория замкнута. Из неравенства $E<0$ следует, что $\varepsilon<1$:

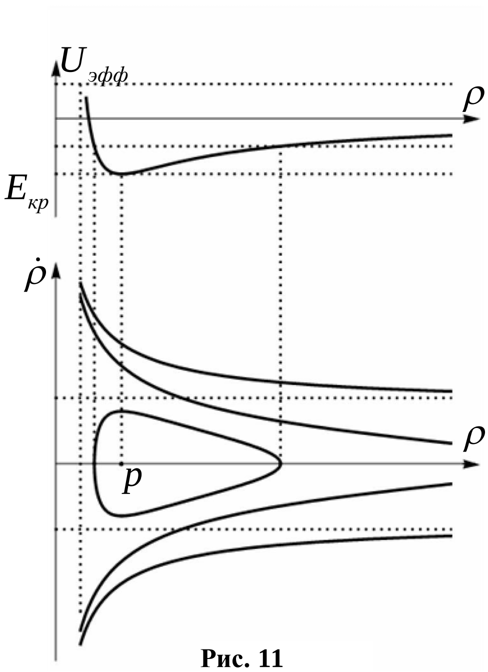

Рис. 11

$$\varepsilon<\frac{\mu}{k}\sqrt{-2E_{кр}}=\frac{\mu}{k}\sqrt{\frac{k^2}{\mu^2}}=1.$$

Перейдя в (31) к обратным величинам, получим:

$$\rho_{\min}:=\frac{p}{1+\varepsilon}\le\rho\le\frac{p}{1-\varepsilon}=:\rho_{\max}.$$

3) При $E\ge0$ $(\varepsilon\ge1)$ первое неравенство в (31) безусловно выполнено, так что область изменения ρ описывается одним неравенством

$$\rho\ge\rho_{\min}=\frac{p}{1+\varepsilon}.$$

В этом случае фазовая траектория распадается на две неограниченные ветви (30), причем если $\rho\to\infty$, то скорость $\dot{\rho}$ стремится к $\sqrt{2E}$.

Минимальный уровень полной энергии E, обеспечивающий неограниченность траектории, равен нулю. Выразим E через начальные значения:

$$E=\frac{\dot{\rho}_0^2}{2}-\frac{k}{\rho_0}+\frac{\mu^2}{2\rho_0^2}=\frac{\dot{\rho}_0^2}{2}-\frac{k}{\rho}+\frac{\rho_0^2\dot{\varphi}_0^2}{2}=\frac{\dot{\rho}_0^2+\rho_0^2\dot{\varphi}_0^2}{2}-\frac{k}{|r_0|}.$$

Напомним, что

$$v = \dot{\rho} e_{\rho} + \rho \dot{\varphi} e_{\varphi}. \tag{33}$$

Поэтому

$$E = \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{|r_0|}.$$

Равенство $E = 0$ означает, что

$$|v_0| = \sqrt{\frac{2k}{|r_0|}}.$$

При старте спутника с поверхности Земли $|r_0| = R,\ k = gR^2$. Поэтому минимальная величина начальной скорости, обеспечивающая неограниченность траектории, равна $\sqrt{2gR} \approx 11{,}2$ км/с. Эту величину, называемую второй космической скоростью, мы уже нашли раньше в **1.6** при условии старта вертикально вверх; оказывается, что это условие можно заменить более слабым требованием, чтобы начальная скорость не была направлена внутрь тела Земли, т.е. угол между v_0 и r_0 был бы не больше прямого. Действительно, из (33) следует, что

$$\dot{\rho}(0) = \left(v_0, e_{\rho_0}\right). \tag{34}$$

Если угол острый, то $\dot{\rho}(0) > 0$ и из (32) следует, что спутник будет двигаться по удаляющейся ветви неограниченной траектории. В случае прямого угла $\dot{\rho}(0) = 0$ и из (28) вытекает, что $E = U_{эфф}(\rho_0)$, т.е. $\rho_{\min} = \rho_0 = R$. Следовательно, и в этом случае траектория спутника не пересекается с телом Земли.

3.7. О круговых орбитах и первой космической скорости

В пункте **3.5** для минимального значения эффективной потенциальной энергии при заданном значении μ было введено обозначение:

$$E_{кр} = -\frac{k}{2p}.$$

Если $E = E_{кр}$, *то движение происходит по круговой орбите радиуса* $\rho = p = \mu^2 / k$ *с постоянной угловой скоростью* $\dot{\varphi} = \mu / p^2 = k^2 / \mu^3$.

Действительно, с одной стороны, из (30), (25) следует, что в данной ситуации возможны только указанные значения ρ и $\dot{\varphi}$. С другой – эти значения действительно удовлетворяют уравнениям движения (25), (29).

Заметим, что и наоборот, если спутник движется по круговой орбите, то необходимо $E = E_{кр}$.

Действительно, при движении по круговой орбите $\dot{\rho} \equiv 0$ и $\ddot{\rho} \equiv 0$. Поэтому из уравнения расстояний (29) следует, что

$$\frac{\mu^2}{\rho^3} = \frac{k}{\rho^2}, \ \textit{т.е.} \ \rho = \frac{\mu^2}{k} = p.$$

Отсюда и из интеграла энергии (30) получаем:

$$E = E_{кр} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{p} - \frac{k}{\mu}\right)^2 = E_{кр}.$$

В терминах начальных значений радиус-вектора и скорости необходимое и достаточное условие движения по круговой орбите дают два требования:

$$v_0 \perp r_0 \ \ и \ \ v_0^2 |r_0| = k. \tag{35}$$

Действительно, при выполнении этих требований будет

$$\mu^2 = v_0^2 r_0^2 = k|r_0|,$$

т.е.

$$|r_0| = \frac{\mu^2}{k} = p.$$

Кроме того, из первого условия (35) вытекает, что

$$\dot{\rho}(0) = (v_0, r_0)/|r_0| = 0$$

Отсюда и из интеграла энергии (30) следует, что $E = E_{кр}$, т.е. выполнено условие движения по круговой орбите.

Наоборот, если спутник движется по круговой орбите, то $|r| = const$ и $v \perp r$ – скорость направлена по касательной, т.е. перпендикулярно к радиусу. Поэтому $\mu^2 = v^2 r^2$. Отсюда и из постоянства μ и $|r|$ вытекает, что $|v| = const$. Следовательно, $\ddot{r} = -\rho\dot{\varphi}^2 e_\rho = -\frac{v^2}{|r|} e_\rho = -\frac{v_0^2}{|r_0|} e_\rho$. Подставив это значение в левую часть уравнения движения спутника

$$\ddot{r} = -\frac{k}{r^2} e_r = -\frac{k}{r_0^2} e_\rho,$$

получим второе условие (35).

Первая космическая скорость – это скорость движения спутника по круговой орбите вблизи поверхности Земли. Если R есть радиус Земли и g - ускорение свободного падения вблизи земной поверхности, то $k = gR^2$ и из второго условия (35) получаем приближенное значение первой космической скорости:

$$|v_0| \approx \sqrt{gR} \approx 7{,}9 \text{ км/с}.$$

3.8. Уравнения орбит и первый закон Кеплера

Из (25) и (32) следует:

$$\frac{d\varphi}{d\rho}=\pm\frac{\mu}{\rho^2}\frac{1}{\sqrt{2(E-E_{кр})-\left(\frac{\mu}{\rho}-\frac{k}{\mu}\right)^2}}=\pm\frac{\mu}{\rho^2}\frac{1}{\frac{k}{\mu}\sqrt{2(E-E_{кр})\frac{\mu^2}{k^2}-\left(\frac{\mu^2}{\rho k}-1\right)^2}}=$$

$$=\pm\frac{p}{\rho^2}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-\left(\frac{p}{\rho}-1\right)^2}}.$$

Проинтегрируем это равенство:

$$\varphi(\rho)=\pm\int\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\varepsilon^2-\left(\frac{p}{\rho}-1\right)^2}}=\mp\int\frac{d\left(\frac{p}{\rho}-1\right)}{\sqrt{\varepsilon^2-\left(\frac{p}{\rho}-1\right)^2}}=\mp\arcsin\frac{\frac{p}{\rho}-1}{\varepsilon}+C\,.$$

Константу интегрирования C выберем так, чтобы выполнялось равенство $\varphi(\rho_{\min})=0$ – такой выбор будет означать, что ось Ox направлена на ближайшую к O точку орбиты (которая называется *перицентром*). Напомним, что в п. **3.3** направление осей Ox, Oy в плоскости, ортогональной кинетическому моменту $M=|M|e_z$, фиксировано не было; здесь мы выбираем его так, чтобы уравнение орбиты имело возможно более простой вид. Итак,

$$C=\pm\arcsin\frac{\frac{p}{\rho_{\min}}-1}{\varepsilon}=\pm\arcsin 1=\pm\frac{\pi}{2}\,.$$

Следовательно, две ветви орбиты («удаляющаяся» и «приближающаяся») описываются уравнениями:

$$\varphi=\mp\arcsin\frac{\frac{p}{\rho}-1}{\varepsilon}\pm\frac{\pi}{2}\,.$$

Поэтому для обеих ветвей

$$\cos\varphi=\cos\left(\pm\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\frac{p}{\rho}-1}{\varepsilon}\right)\right)=\cos\left(\arccos\frac{\frac{p}{\rho}-1}{\varepsilon}\right)=\frac{\frac{p}{\rho}-1}{\varepsilon}.$$

Полученное уравнение запишем в виде:

$$\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \tag{36}$$

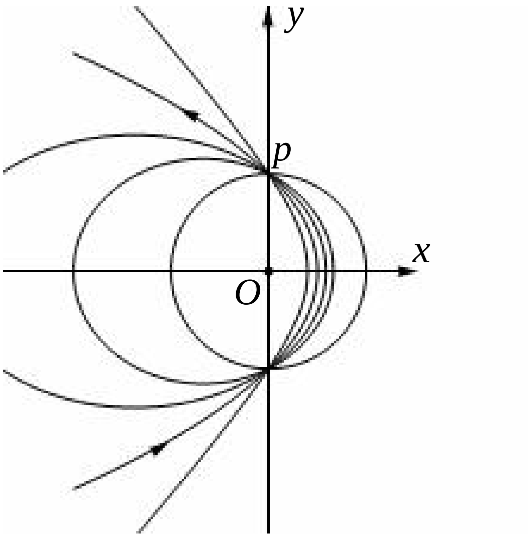

Рис. 12

Напомним из курса аналитической геометрии, что это соотношение представляет *полярное уравнение конического сечения с параметром p и эксцентриситетом ε*. При $0 \le \varepsilon < 1$ оно описывает эллипс (при $\varepsilon = 0$ окружность), при $\varepsilon = 1 -$ параболу, при $\varepsilon > 1 -$ одну ветвь гиперболы (см. рисунок).

В частности, мы доказали **первый закон Кеплера**: *планеты обращаются вокруг Солнца по эллиптическим орбитам с одним из фокусов в центре Солнца.*

3.9. Третий закон Кеплера

Этот закон утверждает, что *квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит*:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k} \quad \left(k = Gm_O,\ m_O - \textit{масса Солнца}\right) \tag{37}$$

Для доказательства воспользуемся вторым законом Кеплера. Произведение постоянной секториальной скорости планеты $\dot{\sigma} = \mu/2$ на искомый период T ее обращения вокруг Солнца равно площади эллипса, описываемого планетой. Последняя, как известно из интегрального исчисления, равна πab, где $a, b -$большая и малая полуоси эллипса. Поэтому

$$T = \frac{2\pi ab}{\mu}.$$

Напомним устанавливаемые в аналитической геометрии соотношения между параметрами эллипса:

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2},\ b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

С их учетом можно следующим образом выразить квадрат периода:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{\mu^2} = \frac{4\pi^2 a^3 p}{\mu^2}.$$

Поскольку (см. п. **3.5**)

$$p = \frac{\mu^2}{k},$$

окончательно получаем (37).

4. Справочные сведения

4.1. Единицы измерения

С 1981 года стандартом рекомендуется использование Международной системы единиц – СИ. Ниже приведены основные и производные единицы этой системы.

4.1.1. Основные.

Длина – метр ($м$), масса – килограмм ($кг$), время – секунда ($с$).

4.1.2. Производные.

Сила – ньютон $(Н) = кг \cdot м/с^2$.

Работа, энергия – джоуль $(Дж) = Н \cdot м$.

Мощность – ватт $(Вт) = Дж/с$.

4.1.3. Десятичные кратные и дольные единицы.

Множитель	Приставка	Обозначение	Примеры
10^9	гига	G (Г)	гигаватт, ГВт
10^6	мега	M (М)	мегатонна, Мт
10^3	кило	k (к)	километр, км
10^2	гекто	h (г)	гектар, га
10	дека	da (да)	декалитр, дал
10^{-1}	деци	d (д)	дециметр, дм
10^{-2}	санти	c (с)	сантиметр, см
10^{-3}	мили	m (м)	миллиметр, мм
10^{-6}	микро	µ (мк)	микрометр (микрон), мкм
10^{-9}	нано	n (н)	нанометр, нм

4.1.4. Традиционно используемы единицы.

Длина – миля (М) $= 1852 м$ (морская),

$= 1609 м$ (сухопутная, уставная),

$= 7468 м$ (старая русская);

– астрономическая единица (а.е.) – среднее расстояние от Земли до Солнца $\approx 149{,}6 млн.\ км$;

– световой год – путь, который свет проходит за год

$= 9,46 \cdot 10^{12}$ км.

Время – минута (мин) $= 60$ с;

– час (ч) $= 60$ мин;

– сутки

солнечные (сут) $= 24$ ч,

звездные $\approx (24 \cdot 60 \cdot 60 - 4 \cdot 60 + 4)$ с

Скорость – узел (У) $=$ морская миля/час $= 0,5144$ м/с

4.2. Земля

Третья по порядку от Солнца из девяти больших планет Солнечной системы (Меркурий – Венера – Земля – Марс – пояс малых планет (астероидов) – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун – Плутон).

Масса - $5976 \cdot 10^{21}$ *кг* - 1/448 массы всех больших планет – 1/330 000 массы Солнца.

Средний радиус 6371,032 *км*.

Среднее расстояние до Солнца - 1 *астрономическая единица (а.е.)* - около 150 млн. *км*; эллиптическая орбита близка к круговой.

Период обращения вокруг Солнца (промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия – *тропический год*) – 365, 2422 сут (средних солнечных суток); движение происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны Северного полюса мира.

Сидерический год (от лат. sidus - звезда) – период обращения Земли вокруг Солнца по отношению к звездам – 365,2596 сут

Средняя скорость движения по орбите около 30 *км/с*.

Период движения вместе с Солнцем вокруг центра Галактики – около 200 млн. лет, средняя скорость движения - 220 *км/с*.

Скорость точек экватора в суточном вращении Земли □ 465 *м/с*, на широте φ она умножается на $\cos\varphi$.

4.3. Луна

Среднее расстояние до Земли 384400 км ($\approx$ 6 радиусов Земли).

Наклон орбиты к плоскости эклиптики $5^{\circ}8'43''$.

Масса $7,35 \cdot 10^{22}$ кг $(1/81,3$ массы Земли).

Средний радиус 1738 км.

Ускорение силы тяжести на поверхности $1,62$ м/с^2.

Сидерический период обращения $27,3$ сут. (лат. sidus - звезда) – период обращения по отношению к звездам.

Синодический период обращения $29,5$ сут. (греч. sinodos - соединение) - промежуток времени между одинаковыми фазами Луны.

Период обращения Луны вокруг собственной оси равен сидерическому периоду обращения вокруг Земли, поэтому с Земли всегда видна одна сторона Луны.

4.4. Солнечная система

Состоит из Солнца, 9 планет, их спутников, малых планет (астероидов) и их осколков, комет и межпланетной среды.

Планеты в порядке удаления от Солнца: Меркурий ($\approx 0,4$ а.е. от Солнца), Венера, Земля (1 а.е. от Солнца), Марс, область малых планет, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон (≈ 40 а.е. от Солнца).

Масса Солнца $\approx 2\cdot 10^{30}$ кг $\approx 99,9\,\%$ массы всей Солнечной системы; диаметр приблизительно в 109 раз больше диаметра Земли.

Солнечная система расположена вблизи плоскости Галактики на расстоянии ≈ 33000 световых лет от ее центра. Скорость вращения вокруг центра ≈ 220 км/с, период обращения $\approx$200 млн. лет.

Зодиакальные созвездия (от греч. «зодиакос» - зверь, «зоон» - животное): Рыбы, Овен, Телец (весна), Близнецы, Рак, Лев (лето), Дева, Весы, Скорпион (осень), Стрелец, Козерог, Водолей (зима). Это созвездия, расположенные в плоскости *эклиптики*, т.е. плоскости земной орбиты.

Возраст Солнечной системы оценивается в 4,6 млрд. лет.

4.5. Краткие сведения об ученых

4.5.1. Аристотель

(384, Стагира во Фракии – 322 до н.э.,) – древнегреческий ученый, участник Академии Платона, основатель философской школы в Афинах, оказавший большое влияние на последующее развитие многих наук. Воспитатель Александра Македонского. Среди его многочисленных сочинений 4 трактата были посвящены вопросам физики.

4.5.2. Архимед

(ок. 287 – 212 до н.э.) – древнегреческий ученый, математик и механик. Один из создателей механики как науки. Исследовал распределение нагрузок между опорами балки, определил и изучил понятие центра тяжести, дал математическое описание законов рычага. «Дай мне, где стать, и я сдвину Землю». Заложил основы гидростатики, нашел знаменитый закон, который теперь называется законом Архимеда.

4.5.3. Птолемей

Клавдий (2 в.), древнегреческий ученый. Разработал так называемую геоцентрическую систему мира, согласно которой все видимые движения небесных светил объяснялись их движением (часто очень сложным) вокруг неподвижной Земли. Основное сочинение по астрономии – «Великое математическое построение астрономии в 13 книгах», арабизированное название «Альмагест». Большую часть жизни провел в Александрии, умер около 168 года.

4.5.4. Коперник

Николай (19.2.1473, Торунь – 24.5.1543, Фромборк) – польский астроном и математик, создатель гелиоцентрической системы мира. Основной его труд «Об обращениях небесных сфер» был опубликован в 1543 году, незадолго до смерти автора.

4.5.5. Бруно

Джордано Филиппо (1548, Нола – 17.2.1600, Рим), итальянский философ и поэт, представитель пантеизма. В области астрономии развивал гелиоцентрическую теорию Н. Коперника, высказывал идеи о бесконечности природы и бесконечном множестве миров Вселенной. Преследуемый церковниками, покинул Италию и жил во Франции, Англии, Германии. По возвращении в Италию (1592) был обвинен в ереси и свободомыслии и после восьмилетнего пребывания в тюрьме сожжен на костре.

4.5.6. Галилей

Галилео (15.2.1564, Пиза – 8.1.1642, Арчетри, близ Флоренции), итальянский физик, механик и астроном, один из основателей естествознания, поэт, филолог и критик. Принадлежал к знатной, но обедневшей флорентийской семье. Образование получил в школе в Пизе, в монастыре Валломброса, по настоянию отца изучал медицину в Пизанском университете. Изучал труды Аристотеля (и отнесся к ним критически), Евклида и Архимеда, последний стал его настоящим учителем. Увлеченный геометрией и механикой, Галилей бросил медицину и вернулся во Флоренцию, где провел 4 года, изучая математику. После первых работ о гидростатических весах и центрах тяжести телесных фигур получил кафедру математики в Пизе (1589), затем занял кафедру математики в Падуе. Падуанский период (1592-1610) – время наивысшего расцвета его деятельности.

Основные труды: «Звездный вестник» (1610-11), «Диалог о двух главнейших системах мира» (1632), «Беседы и математические доказательства, …» (1638). Первый написан на основе астрономических наблюдений, произведенных с помощью построенного Галилеем телескопа с 32-кратным увеличением, и произвел ошеломляющее впечатление обилием новых интереснейших сведений о Луне, спутниках Юпитера, Млечном Пути. Во втором в форме разговоров трех собеседников излагались системы Коперника и Птолемея. Первоначально разрешенный к изданию папой Урбаном VIII, он вскоре был запрещен и послужил основанием для сурового осуждения Галилея со стороны инквизиции. Третий был написан на вилле Арчетри, под Флоренцией, где осужденный Галилей был вынужден провести последние 9 лет жизни. Эта книга подводит итог физических изысканий Галилея и содержит начала динамики; издана в 1638 году в Голландии.

В 1637 году Галилей ослеп. Умер в 1942 году.

4.5.7. Кеплер

Иоганн (27.12.1571, Вейль-дер-Штадт, Вюртемберг, Швабия – 15.11.1630, Регенсбург, Бавария) – немецкий астроном, открывший законы движения планет. Родился в обедневшей дворянской протестантской семье. Получил образование в монастырской школе, духовной семинарии (бакалавр), Тюбингенской академии (1593, магиср). В академии его частным образом познакомил с гелиоцентрической системой мира Н. Коперника проф. М. Местлин. После академии работал преподавателем математики в г. Грац (Австрия). В 1600 году переехал в Прагу к знаменитому астроному Тихо Браге, после смерти которого (1601) получил материалы его многолетних высокоточных наблюдений. Первые два знаменитых закона в применении к Марсу опубликовал в 1609 году в сочинении «Новая астрономия». В 1612 году в сочинении «Гармония Мира» дал формулировку третьего закона. В работе «Сокращение коперниковой астрономии» (ч. 1 – 3, 1618-22) распространил открытые им законы на движение всех планет, Луны и 4 спутников Юпитера. Кеплер опубликовал много книг и статей. Помимо астрономии, он занимался оптикой, геометрией и астрологией (последней главным образом для заработка). Конец жизни Кеплера был омрачен скитаниями и бедностью. При переезде в ноябре 1630 года в Регенсбург заболел и вскоре умер.

4.5.8. Гюйгенс

Христиан (14.4.1629, Гаага – 8.7.1695, там же) – нидерландский механик, физик и математик, создатель волновой теории света. Первый иностранный член Лондонского королевского общества (с 1663), председатель Французской АН (1665-81). Наиболее важные работы: об определении длины дуг окружности, эллипса и гиперболы (ок. 1651), «Об определении величины окружности» (1654), «О расчетах при игре в кости» (1657), установление совместно с Р.Гуком постоянных точек термометра – точки таяния льда и точки кипения воды, усовершенствование объективов астрономических труб и открытие спутника Сатурна Титана (1655) и кольца Сатурна, «Система Сатурна» (1659), изобретение первых маятниковых часов со спусковым механизмом и исследование движений физического маятника, «Маятниковые часы» (1658), работа над созданием «планетной машины» - прообраза современного планетария (1680), «Трактат о свете» (1690) с приложением «О причинах тяжести» (независимо от Ньютона высказана идея закона всемирного тяготения).

4.5.9. Гук

Роберт (18.7.1635, о.Уайт – 3.3.1703, Лондон) – английский естествоиспытатель, член Лондонского королевского общества (1663), В 1953 году поступил в Оксфордский университет, где впоследствии стал ассистентом Р. Бойля. В 1667-83 секретарь Лондонского королевского общества. Построил воздушный насос (1659), совместно с Х. Гюйгенсом установил точки таяния льда и кипения воды (ок. 1660), усовершенствовал барометр, зеркальный телескоп, применил зрительную трубу для измерения углов, сконструировал прибор для определения силы ветра, машину для деления круга и другие приборы. Открыл носящий теперь его имя закон о пропорциональности силы и деформации, предвосхитил закон всемирного тяготения и в 1679 году высказал мнение, что под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, планета должна двигаться по эллипсу. Придерживался волновой теории света и оспаривал корпускулярную. Теплоту считал результатом механического движения частиц вещества. С помощью усовершенствованного им микроскопа наблюдал и зарисовывал клеточное строение растений. Высказывал мысли об истории Земли, изменении земной поверхности и фауны. По его архитектурным проектам построено несколько зданий.

4.5.10. Ньютон

Исаак (4.1.1643, Вулсторп, ок. Грантема – 31.3.1727, Кенсингтон) – английский физик и математик, создавший теоретические основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление, изобретатель зеркального телескопа и автор важнейших экспериментальных работ по оптике.

Родился в семье фермера; отец его умер незадолго до рождения сына. В 1661 году поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета в качестве субсайзера (так назывались бедные студенты, выполнявшие для заработка обязанности слуг в колледже), где с весны 1664 года лекции по математике читал И. Барроу. С весны 1665 по весну 1667, во время эпидемии чумы, находился в своей родной деревне Вулсторп. Эти годы были наиболее продуктивными в научном творчестве Ньютона. В 1668 году Ньютону была присвоена степень магистра, а в 1669 И. Барроу передал ему физико-математическую кафедру, которую Ньютон занимал до 1701 года. В 1687 году Ньютон опубликовал свой грандиозный труд «Математические начала натуральной философии». В 1695 получил должность смотрителя Монетного двора, в том же году избран иностранным членом Парижской АН. В 1705 году за научные труды возведен в дворянское достоинство.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Айзерман М. А. Классическая механика / М. А. Айзерман.— Изд. 3-е.— М. : Физматлит, 2005.— 378 с.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд.— Изд. 5-е.— М. : Едиториал УРСС , 2003.— 416 с.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики : учеб. пособие [для вузов : в 2 ч.]. Ч. 1 : Кинематика, статика, динамика материальной точки / Н.Н. Бухгольц. — Изд. 10-е, стер. — СПб. : Лань, 2009. — 467 с.
4. Маркеев А. П. Теоретическая механика : учебник для студ. механ.-мат. спец. ун-тов / А.П. Маркеев.— Изд. 3-е, испр. — М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001.— 591 с.
5. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике : [учебное пособие для студ. вузов, обуч. по направлениям подготовки и специальностям в области техники и технологий по дисциплине "Теоретическая механика"] / И.В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина .— Изд. 50-е, стер. — СПб. : Лань, 2010 .— 447 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учебное пособие : Т. 2: Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон . — Изд. 9-е, стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2010 .— 638 с.
2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики : В 2 т. : Для студ.вузов, обуч. по техн. специальностям. Т.1: Статика и кинематика.-6-е изд., испр. Т.2: Динамика.-5-е изд., испр. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин .— СПб. : Лань, 2002 .— 729 с.
3. Вильке В. Г. Теоретическая механика : Учебник для студ., обуч. по направлениям "Математика", "Механика", "Механика, приклад. математика", специальностям "Математика", "Механика" / В.Г. Вильке .— 3-е изд., испр. и доп. — СПб. : Лань, 2003 .— 300 с.
4. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики : [Учебное пособие] / В.Ф. Журавлев.— М. : Наука:Физматлит, 1997 .— 320 с.

5. Ньютон Исаак Математические начала натуральной философии / Исаак Ньютон ; Пер. с латин. и коммент. А. Н. Крылова; Под ред. и с предисл. Л. С. Полака; [АН СССР] .— М. : Наука, 1989. 687 с.
6. Ландау Л. Д. Теоретическая физика : В 10 т.: Учеб. пособие для студ. физ. специальностей ун-тов. Т.1: Механика / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц; Под ред.Питаевского Л.П.— 5-е изд.,стер. – М. : Физматлит, 2001 .— 222 с.
7. Павленко Ю. Г. Лекции по теоретической механике : учебник для вузов по специальностям "Механика", "Прикладная математика", "Физика", "Астрономия" / Ю. Г. Павленко.— Изд. 2-е, перераб. — М. : Физматлит, 2002.— 391 с.
8. Павловский М. А. Теоретическая механика : Учеб. для техн. вузов / М. А. Павловский, Л. Ю. Акинфиева, О. Ф. Бойчук ; Под общ. ред. д-ра техн. наук проф. М. А. Павловского .— Киев : Выща. шк., 1990 .— 480 с.
9. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С.М.Тарг. — 15-е изд.,стер. — М.:Высш.шк., 2005. — 415 с.
10. Цывильский В. Л. Теоретическая механика : Учебник для втузов / В. Л. Цывильский .— М. : Высш. шк., 2001 .— 318 с.
11. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика : Учебное пособие для студ.вузов, обуч. по техн. специальностям / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова .— 9-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2004.— 763с.
12. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие для втузов / А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А. А. Яблонского. — Изд. 13-е, стер. — М. : Интеграл-пресс, 2004 .— 382 с.
13. Теоретическая механика. Терминология. Буквенные обозначения величин: Сборник рекомендуемых терминов. – Вып. 102. – М. : Наука, 1984. – 48с.
14. Теоретическая механика: Сб.научно-метод.ст. / М-во образования РФ. Научно-метод. совет по теорет.механике. Моск. гос. ун-т им.М.В.Ломоносова, Ин-т механики; Под ред. Ю.Г.Мартыненко. – Вып.25. – М. :Изд-во МГУ, 2004. – 213 с.
15. Курс теоретической механики : Учебник для вузов по направлению подгот. дипломир. специалистов в обл. техники и технологии / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин и др.; Под ред. К. С. Колесникова .— 3-е изд., стер. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005 .— 735 с.

Предметный указатель

Г

гравитационная постоянная, 5

Д

диэлектрическая проницаемость, 17

З

задача Кеплера, 20
закон
- всемирного тяготения, 5, 11
- Гука, 7
- Кеплера второй, 19
- Кеплера первый, 26
- Кеплера третий, 26
- Ньютона второй, 3, 11
- Ньютона первый, 11
- Ньютона третий, 11
- сохранения кинетического момента, 17
- сохранения энергии, 12

И

изохронность колебаний, 8
импульс, 17

К

колебания
- гармонические, 7

количество движения, 17

М

малых колебаний
- уравнение, 8

материальная точка, 3
момент
- импульса, 17
- кинетический, 17

П

перицентр, 25
поле
- гравитационное, 17
- центральное, 17
- электрическое, 17

принцип относительности Галилея, 4

С

система
- гелиоцентрическая, 9
- геоцентрическая, 9
- инерциальная, 3
- с одной степенью свободы, 12

скорость
- вторая космическая, 6, 23
- первая космическая, 24
- секториальная, 19

Ф

фазовые траектории, 12
фазовый портрет, 12

Ц

центральная точка, 17

Э

энергия
- кинетическая, 12
- полная, 12
- потенциальная, 12
- эффективная, 20