Министерство образования Российской Федерации
Воронежский государственный университет

И.Н. Прядко, Б.Н. Садовский

КИНЕМАТИКА

Конспекты лекций

Воронеж 2009

Прядко И.Н., Садовский Б.Н. Кинематика: *Конспекты* / И.Н. Прядко, Б.Н. Садовский. – Воронеж, Изд-во Воронеж. ун-та, 2009. – 56 с.

Учебное пособие написано на основе лекций, читавшихся авторами в разные годы на математическом факультете ВГУ, и предназначено для студентов математических специальностей, изучающих теоретическую механику. Содержание пособия охватывает материал первой части государственного стандарта по теоретической механике, относящейся к кинематике. Последний параграф посвящен изложению нетрадиционной интерпретации релятивистской кинематики – этот материал предназначен для специальных курсов.

Рекомендовано к изданию Научно-методическим советом математического факультета Воронежского университета, протокол №7 от 26.03.09.

Рецензент:
заведующий кафедрой уравнений с частными производными и теории вероятностей ВГУ доктор физ.-мат. наук профессор **Глушко А.В.**

Оглавление

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ 5

1.1. Отмеченная точка. 5
1.2. Геометрические понятия и факты. 5
1.3. Декартовы системы отсчета. 7
1.4. Неизменяемые системы, твердые среды и тела. 8
1.5. Системы отсчета и системы координат. 9
1.6. Закон движения, скорость, ускорение, траектория. 10
1.7. Цилиндрическая система координат. 10
1.8. Три частных случая. 12
1.9. Сферическая система координат. 12
1.10. Географическая система координат. 13
1.11. Естественный способ задания движения. 13
1.12. Пример анализа движения при естественном задании. 15

2. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 16

2.1. Постановка задачи. 16
2.2. Теорема о сложении скоростей и ускорений. 18
2.3. Пример: движение точки обода колеса. 19
2.4. Пример: движение точки, скользящей по колесу. 20
2.5. Непосредственный анализ сложного движения. 22

3. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 22

3.1. Скорости и ускорения точек твердой среды. 22
3.2. Поступательное движение. 24
3.3. Вращение вокруг неподвижной прямой. 24
3.4. Лемма о кососимметричности. 26
3.5. Лемма о кососимметрической матрице. 26
3.6. Теорема Эйлера о скоростях точек твердой среды. 27
3.7. Следствие о переносной вращательной скорости и ускорении Кориолиса. 28
3.8. Свойства вектора мгновенной угловой скорости. 28

3.9. Пример: правый берег круче левого. 30
3.10. Об инерциальных системах отсчета. 31
3.11. Плоскопараллельное движение. 32
3.12. Мгновенный центр скоростей. 34
3.13. Геометрический способ нахождения мгновенного центра скоростей. 35

4. КИНЕМАТИКА СВЕТЛЯЧКОВ 35

4.1. Эфир и световые сигналы. 36
4.2. Светлячок и его такт. 36
4.3. События, их место и время. 37
4.4. Время светлячка. 38
4.5. Местное время. 39
4.6. Относительные расстояния. 41
4.7. Постоянство скорости света. 43
4.8. Оператор Лоренца. 44
4.9. Преобразование Лоренца. 45
4.10. Теорема о сложении скоростей. 47
4.11. Общая формула замедления времени. 48
4.12. Парадокс близнецов. 49
4.13. Общая формула лоренц-фицджеральдова сокращения. 50
4.14. Общая формула отставания. 51
4.15. Принцип относительности. 52

ЛИТЕРАТУРА 54

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 56

1. Основные понятия

1.1. Отмеченная точка.

Отмеченной точкой будем называть объект относительно малых размеров, который можно наблюдать в различные моменты времени. Например, вершина Эйфелевой башни и центр диска Луны – отмеченные точки. Точка последней до настоящего момента встречи транспортного корабля с Международной Космической Станцией не является отмеченной: ее можно было наблюдать только в момент встречи. Неподвижная относительно Земли точка, в которой произошла эта встреча, является отмеченной, потому что в любой момент времени ее можно найти по географическим координатам (широта – долгота – высота над поверхностью Земли), которые она имела в момент встречи.

Неподвижная относительно тела космической станции точка данной встречи также является отмеченной; в момент встречи положения описанных двух отмеченных точек совпадают, а в другие моменты различны. Вообще, задание любого закона, определяющего изменение во времени координат точки относительно какой-нибудь системы отсчета, определяет отмеченную точку. Это, в частности, показывает, что отмеченные точки в любой момент времени «заполняют» мировое пространство.

1.2. Геометрические понятия и факты.

В любой фиксированный момент времени t отмеченные точки образуют *трехмерное аффинное евклидово пространство*, т.е. пространство, изучаемое в элементарной стереометрии. Мы будем обозначать его через E^t. Точками этого пространства являются положения отмеченных точек в момент t. Например, упомянутая выше точка встречи транспортного корабля и космической станции является точкой пространства E^{t_0}, где t_0 – момент этой встречи.

Для любых отмеченных точек A и B определены и обладают известными свойствами следующие понятия:

– *направленный отрезок* $A(t)B(t)$,

– *вектор* $\overline{r} = \overline{r}_{AB}(t)$, определяемый этим направленным отрезком (который можно формально представлять как множество всех направленных отрезков, получаемых из данного параллельными переносами),

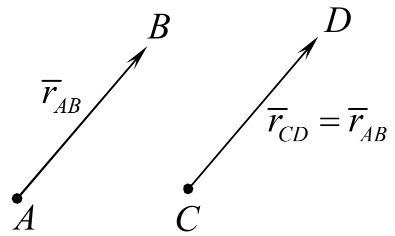

Рис. 1

– произведение $\alpha\overline{r}_{AB}(t)$ вещественного числа на вектор и сумма векторов $\overline{r}_{AB}(t) + \overline{r}_{CD}(t)$,

– угол $\angle(\overline{a}, \overline{b})$ - радианная мера угла кратчайшего поворота вектора $\overline{a}$ до совпадения с направлением вектора $\overline{b}$,

– скалярное произведение $(\overline{a}, \overline{b})$ векторов, равное произведению их длин на косинус угла между ними,

– расстояние $\rho(A(t), B(t)) = |A(t)B(t)| = |\overline{r}| = \sqrt{(\overline{r}, \overline{r})} = \sqrt{\overline{r}^2}$ между точками (длина вектора) в данный момент,

– *множество* V^t всех векторов $\overline{r}_{AB}(t)$, которое вместе с операциями умножения на вещественные скаляры, сложения и скалярного умножения векторов представляет собой трехмерное линейное евклидово пространство.

Пространства E^t при разных значениях t изоморфны между собой, однако никакого «естественного» изоморфизма между ними не существует. Невозможно сегодня указать точку мирового пространства, в которой вчера в полдень находилась вершина Эйфелевой башни. Но если задать какую-нибудь систему отсчета и связанную с ней систему координат, например, связанные с Землей широту, долготу и высоту над уровнем моря, то соответствие между точками пространств E^{t_1} и E^{t_2} можно определить через равенство координат.

1.3. Декартовы системы отсчета.

Декартовой системой отсчета будем называть упорядоченную четверку отмеченных точек $S=(O,E_1,E_2,E_3)$, для которой в любой момент времени выполнены три условия:

1) $|OE_1|=|OE_2|=|OE_3|=1$,

2) $OE_i \perp OE_j$ $(i \neq j)$,

3) направленные отрезки OE_1, OE_2, OE_3 образуют *правую тройку*, т.е. с конца последнего из них кратчайший поворот первого до второго кажется происходящим против часовой стрелки (Рис. 2).

Для векторов, определяемых отрезками OE_1, OE_2, OE_3, мы будем использовать обозначения $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ (иногда $\overline{e}_x, \overline{e}_y, \overline{e}_z$ или $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$). Декартова система отсчета S может быть эквивалентно определена заданием *начала отсчета* O и правильно ориентированного ортонормированного базиса $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ в пространстве V^t при любом t.

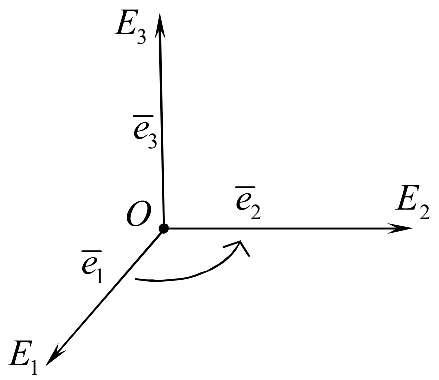

Рис. 2

Положение отмеченной точки A по отношению к декартовой системе отсчета S в любой момент времени определяется ее радиус-вектором, который можно разложить по базису $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$:

$$\overline{r}_{OA} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3.$$

При фиксированном начале отсчета O радиус-вектор точки A будем обозначать также $\overline{r}_A$, а для фиксированной точки A $-$ $\overline{r}$.

Арифметический трехмерный вектор

$$r_{OA} = r_A = r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

изображает положение точки A в момент t в координатном пространстве $\mathbb{R}^3$. Соответствие между геометрическими и арифметическими векторами $\overline{r}$ и r, задаваемое с помощью базиса $\overline{e} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$, является, как известно, изоморфизмом линейных евклидовых пространств, т.е. взаимно однозначным отображением, сохраняющим линейные операции и скалярное произведение.

Геометрическим векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ соответствуют арифметические векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. Неизменяемые системы, твердые среды и тела.

В механике широко используются близкие по смыслу понятия “неизменяемая система”, “твердое тело”, “твердая среда”. Мы будем использовать их в следующих значениях.

Неизменяемой системой будем называть любую совокупность отмеченных точек, расстояния между которыми остаются неизменными во времени. Например, декартова система отсчета является неизменяемой, так как расстояния между точками O и E_i, по определению, постоянно равны 1, а отсюда следует, очевидно, что расстояния между различными E_i также постоянны и равны $\sqrt{2}$.

Если неизменяемая система в любой момент t заполняет все пространство E', то она называется *твердой средой.* Например, множество Σ всех отмеченных точек, неподвижных (т.е. имеющих постоянные координаты) относительно заданной декартовой системы отсчета S, есть твердая среда.

Термин *твердое тело* используется в литературе не вполне однозначно, но всегда означает неизменяемую систему, обладающую (возможно) теми или иными дополнительными свойствами. Мы будем считать такими свойствами ограниченность и связность, т.е. возможность соединить любые две её точки непрерывной кривой, целиком лежащей в этой системе. Например, Земля, Луна, деревянный кубик.

1.5. Системы отсчета и системы координат.

Особо отметим, что точками твердой среды и твердого тела являются не положения входящих в них отмеченных точек в разные моменты времени, а сами отмеченные точки. Поскольку расстояния между ними в твердой среде не меняются, твердая среда представляет собой не зависящее от времени трехмерное аффинное евклидово пространство.

В самом общем смысле *системой отсчета (геометрической)* называют любую твердую среду. Например, в земных экспериментах в качестве системы отсчета обычно выступает твердая среда, жестко связанная с телом Земли, а в опытах на космической станции – с телом станции. По отношению к твердой среде можно отмечать положения движущейся точки в разные моменты времени, что дает возможность чисто геометрически определять и изучать такие кинематические понятия, как скорость, ускорение, траектория. Однако зачастую удобнее переводить это изучение в русло математического анализа путем введения тех или иных координат, связанных с системой отсчета, т.е. с твердой средой.

Например, рассмотренная в пункте 1.3 декартова система отсчета S есть упорядоченная четверка отмеченных точек, обладающая определенными свойствами. С ней естественно связана твердая среда Σ и декартова прямоугольная система координат, однако в различных задачах бывают полезны и другие координатные системы.

Вообще, *системой координат на некоторой области* U *твердой среды* Σ называется взаимно однозначное отображение φ этой области на какое-нибудь открытое множество V пространства $\mathbb{R}^3$; при этом считается, что само отображение φ и обратное к нему непрерывно дифференцируемы. Помимо декартовых прямоугольных координат, в механике часто используются цилиндрические, сферические, иногда географические и другие координаты – они будут рассмотрены ниже.

Подчеркнем, однако, что основным для нас является понятие декартовой системы отсчета, которое включает в себя определенный способ задания твердой среды и координат на ней.

1.6. Закон движения, скорость, ускорение, траектория.

Равенство

$$r = r(t), \tag{1.1}$$

определяющее координаты отмеченной точки A в любой момент времени, называется *законом движения* этой точки по отношению к системе отсчета S. Оно определяет также зависимость от времени радиус-вектора $\overline{r} = \overline{r}_{OA}(t)$ этой точки. Использование уравнения (1) имеет то преимущество, что арифметические векторы $r(t)$ при разных t лежат в едином пространстве $\mathbb{R}^3$, в то время как соответствующие геометрические векторы $\overline{r}(t)$ принадлежат различным пространствам V_t.

Скорость v и *ускорение* w точки A в момент t относительно системы отсчета S определяются равенствами:

$$v := \dot{r}(t) \left(= \frac{dr(t)}{dt} \right), \; w := \ddot{r}(t) \left(= \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \right). \tag{1.2}$$

Множество

$$T = \{r(t) : t \in \mathbb{R}\} \tag{1.3}$$

называется *траекторией* данной точки (относительно системы отсчета S).

1.7. Цилиндрическая система координат.

Цилиндрическими координатами точки A по отношению к декартовой системе отсчета S называется тройка (ρ, φ, z) – см. Рис. 3.

Декартовы координаты выражаются через них с помощью формул

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Вектор $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ (верхний индекс Т здесь и в дальнейшем обозначает транспонирование) есть e_z, а для $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^{\mathrm{T}}$ мы будем использовать обозначение e_ρ – это единичный вектор, направленный вдоль проекции вектора r на плоскость xOy.

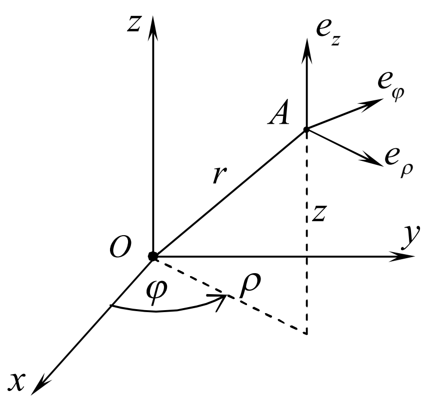

Рис. 3

В этих обозначениях (1.4) имеет вид:

$$r = \rho e_\rho + z e_z. \tag{1.5}$$

Пусть движение точки задано в цилиндрической системе координат. Тогда

$$v = \dot{r} = \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{e}_\rho + \dot{z} e_z \text{ и } \dot{e}_\rho = \frac{de_\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введем еще обозначение $(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)^{\mathrm{T}} =: e_\varphi$ – это вектор единичной длины, получаемый из e_ρ поворотом на прямой угол против часовой стрелки. Окончательно скорость выразится следующим образом:

$$v = \dot{\rho} e_\rho + \rho\dot{\varphi} e_\varphi + \dot{z} e_z. \tag{1.6}$$

Найдем ускорение:

$$w = \dot{v} = (\ddot{\rho} e_\rho + \dot{\rho}\dot{e}_\rho) + (\dot{\rho}\dot{\varphi} e_\varphi + \rho\ddot{\varphi} e_\varphi + \rho\dot{\varphi}\dot{e}_\varphi) + \ddot{z} e_z.$$

Поскольку

$$\dot{e}_\rho = \dot{\varphi} e_\varphi, \quad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi} e_\rho,$$

получаем равенство:

$$w = \dot{v} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) e_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) e_\varphi + \ddot{z} e_z. \tag{1.7}$$

Векторы e_ρ, e_φ, e_z составляют ортонормированную тройку (правую). Это, в частности, означает, что квадраты длин векторов v и w можно вычислить как суммы квадратов коэффициентов в разложениях (1.6), (1.7).

1.8. Три частных случая.

(а) $\rho = const = \rho_0$ (движение по поверхности цилиндра постоянного радиуса)

$$\Rightarrow \text{ (см. (1.6), (1.7))} \quad v = \rho_0 \dot\varphi e_\varphi + \dot z e_z, \quad w = -\rho_0 \dot\varphi^2 e_\rho + \rho_0 \ddot\varphi e_\varphi + \ddot z e_z.$$

(б) $\rho = \rho_0$, $z = 0$ (движение по окружности)

$$\Rightarrow v = \rho_0 \dot\varphi e_\varphi, \quad w = -\rho_0 \dot\varphi^2 e_\rho + \rho_0 \ddot\varphi e_\varphi.$$

(в) $\rho = \rho_0$, $z = 0$, $\dot\varphi = const = \omega_0$ (движение по окружности с постоянной угловой скоростью)

$$\Rightarrow v = \rho_0 \omega_0 e_\varphi, \quad w = -\rho_0 \omega_0^2 e_\rho.$$

В случае плоского движения проекции векторов на направление e_ρ называются *радиальными составляющими* (*радиальная скорость, радиальное ускорение*) на e_φ – *тангенциальными, или касательными*. Величины $\dot\varphi =: \omega$ и $\ddot\varphi =: \varepsilon$ называются, соответственно, *угловой скоростью* и *угловым ускорением* (единицы измерения – $(1/c)$ и $(1/c^2)$). Вектор $-\rho\omega^2 e_\rho$ называется *центростремительным ускорением*.

1.9. Сферическая система координат.

Сферическими координатами точки A по отношению к декартовой системе отсчета S называется тройка $(\rho_s, \theta, \varphi)$ – см. Рис. 4. Чтобы вычислить скорость и ускорение точки, движение которой задано в сферических координатах, можно перейти к декартовым

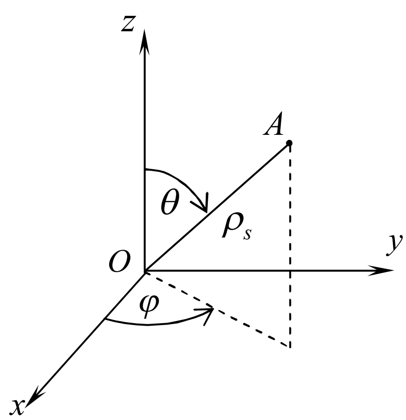

Рис. 4

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_s \cos\varphi \sin\theta \\ \rho_s \sin\varphi \sin\theta \\ \rho_s \cos\theta \end{pmatrix}$$

или цилиндрическим координатам

$$\rho = \rho_s \sin\theta\,, \quad \varphi = \varphi\,, \quad z = \rho_s \cos\varphi\,.$$

1.10. Географическая система координат.

Географические координаты точки A на поверхности Земли – это *широта* φ (*северная* или *южная*) от 0 до 90 градусов и *долгота* λ (*восточная* или *западная*) от 0 до 360 градусов. Широта отсчитывается от земного экватора к полюсам, долгота – от Гринвичского меридиана к востоку или западу. Если точка A находится не точно на поверхности Земли, то нужно учитывать еще *высоту над поверхностью моря* или (точнее) разность h меду расстоянием OA и средним радиусом Земли R=6371,032 *км*. Легко выразить сферические координаты через географические (географическую широту в этих формулах обозначим φ_g; южную считаем отрицательной):

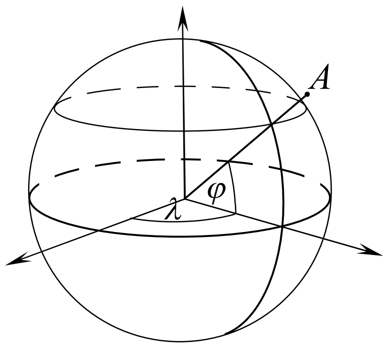

Рис. 5

$$\rho_S = (R+h),$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} - 2\pi\varphi_g / 360,$$
$$\varphi = 2\pi\lambda / 360.$$

1.11. Естественный способ задания движения.

Этот способ предполагает непосредственное задание траектории точки и закона движения по ней. В некоторых случаях он действительно представляет наиболее естественное описание перемещения, например, в случае движения автомобиля по извилистой горной дороге или бусинки по гладкой проволоке известной формы.

Будем считать, что траектория задана в $\mathbb{R}^3$ (т.е. в координатах относительно выделенной декартовой системы отсчета S) параметрическим уравнением

$$r = p(u), \tag{1.8}$$

где функция $p:(a,b) \to \mathbb{R}^3$ имеет непрерывную производную, всюду отличную от нуля:

$$r'_u \neq 0. \tag{1.9}$$

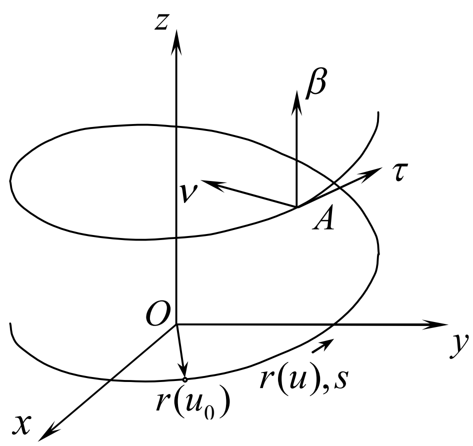

Рис. 6

Закон движения по траектории задается в виде функции, определяющей зависимость от времени *естественного параметра* s. Напомним, что естественным параметром называется алгебраическая величина длины дуги траектории, соответствующей изменению параметра u от фиксированного начального значения u_0 до переменного значения. Естественный параметр связан с исходным параметром траектории соотношением:

$$s = \int_{u_0}^{u} |p'(v)| dv = \int_{u_0}^{u} \sqrt{x'^2(v) + y'^2(v) + z'^2(v)} dv \tag{1.10}$$

(мы считаем, что направление возрастания s выбрано согласованно с направлением возрастания u). Из (1.10) и (1.9) следует, что соответствия $u \mapsto s$ и $s \mapsto u$ являются строго возрастающими непрерывно дифференцируемыми функциями, причем

$$\frac{ds}{du} = |r'_u| \quad \text{и} \quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{|r'_u|}. \tag{1.11}$$

В частности, это означает, что соответствие $s \mapsto r$ есть непрерывно дифференцируемая (векторная) функция и

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{du}\frac{du}{ds} = \frac{dr}{du} : \left|\frac{dr}{du}\right|. \tag{1.12}$$

Это есть вектор единичной длины, направленный по касательной к траектории в сторону возрастания s и u – он обозначается через τ. Теперь скорость точки можно выразить следующей простой формулой:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\tau \,. \tag{1.13}$$

Вычислим ускорение:

$$w = \dot{v} = \ddot{s}\tau + \dot{s}\dot{\tau} = \ddot{s}\tau + \dot{s}\frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\tau + \dot{s}^2\frac{d\tau}{ds} \,. \tag{1.14}$$

Производная по s от вектора τ, имеющего постоянную длину, как известно, ортогональна этому вектору. Ее длина обозначается k и называется *кривизной* траектории в данной точке, а соответствующий единичный вектор имеет обозначение ν – это орт главной нормали. Таким образом,

$$w = \ddot{s}\tau + \dot{s}^2 k\nu \,. \tag{1.15}$$

Кривизну в этой формуле иногда бывает удобно выразить через *радиус кривизны* ρ_k:

$$k = \frac{1}{\rho_k} \tag{1.16}$$

Например, при движении по окружности ρ_k есть радиус этой окружности.

1.12. Пример анализа движения при естественном задании.

Пусть траектория точки есть винтовая линия или окружность:

$$r = \rho_0 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + h_0\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \rho_0 e_\rho + h_0 \varphi e_3 \quad (\rho_0 >, h_0 \geq 0)$$

В качестве параметра u здесь выступает φ, причем

$$r'_\varphi = \rho_0 e_\varphi + h_0 e_3, \ \left| r'_\varphi \right| = \sqrt{\rho_0^2 + h_0^2} > 0 \,,$$

так что условие (1.9) выполнено. В соответствии с формулами (1.13) и (1.15)

$$v = \dot{s}\tau, \quad w = \ddot{s}\tau + \dot{s}^2 k\nu \tag{1.17}$$

Если зависимость s от времени известна, то остается найти τ и $k\nu$. Имеем:

$$\tau = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} : \left|\frac{dr}{d\varphi}\right| = (\rho_0 e_\varphi + h_0 e_z) / \sqrt{\rho_0^2 + h_0^2} \tag{1.18}$$

Далее,

$$k\nu = \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{d\varphi} : \left|\frac{dr}{d\varphi}\right| = -\rho_0 e_\rho / (\rho_0^2 + h_0^2). \tag{1.19}$$

В двух последних формулах еще нужно найти e_φ и e_ρ, для чего достаточно выразить φ через s. Это выражение получается из равенства

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + h_0^2}} :$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{\rho_0^2 + h_0^2}}. \tag{1.20}$$

Здесь φ_0 – значение параметра в начальный момент движения.

Итак, зависимость v и w от t дается формулами (1.17) – (1.20).

В случае движения по окружности ($h_0 = 0$)

$$\tau = e_\varphi,\ k = \frac{1}{\rho_0},\ \nu = -e_\rho.$$

2. Сложное движение точки

2.1. Постановка задачи.

Рассматриваются две декартовых системы отсчета: «неподвижная» $S = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ и «подвижная» $\tilde{S} = (\tilde{O}, \overline{e}_{\tilde{1}}, \overline{e}_{\tilde{2}}, \overline{e}_{\tilde{3}})$. Вектор координат любого геометрического вектора $\overline{q} \in V^t$ относительно S будем обозначать q, а относительно $\tilde{S}$ – $\tilde{q}$. Предположим, что задано движение точки A относитель-

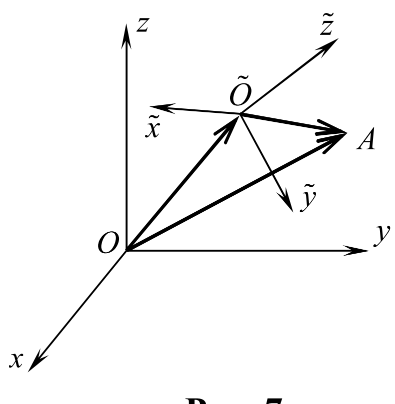

Рис. 7

но $\tilde{S}$:

$$\tilde{r}_{\tilde{O}A} = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix}$$

и движение системы $\tilde{S}$ относительно S:

$$r_{O\tilde{O}} = \begin{pmatrix} x_{\tilde{O}}(t) \\ y_{\tilde{O}}(t) \\ z_{\tilde{O}}(t) \end{pmatrix}, \quad e_{\tilde{j}} = \begin{pmatrix} b_{1j}(t) \\ b_{2j}(t) \\ b_{3j}(t) \end{pmatrix} \quad (j = 1,2,3).$$

Как известно из курса алгебры, тогда для любого $\overline{q} \in V_t$

$$q = B\tilde{q},$$

где

$$B = B(t) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} -$$

матрица, столбцами которой являются координаты подвижных базисных векторов относительно неподвижных. Матрицу B мы будем также записывать в виде «вектора» ее столбцов

$$B = (e_{\tilde{1}}\, e_{\tilde{2}}\, e_{\tilde{3}}).$$

Обозначим через $\tilde{A}_t$ «след», оставленный точкой A в подвижной системе $\tilde{S}$ в момент t, т.е. такую неподвижную относительно $\tilde{S}$ отмеченную точку, которая в момент t совпадает с A. Введем еще следующие обозначения и термины:

$v_{абс}, w_{абс}$ – *абсолютная* скорость и *абсолютное* ускорение, т.е. скорость и ускорение A в системе S,

$v_{отн}, w_{отн}$ – *относительная* скорость и *относительное* ускорение, т.е. скорость и ускорение A в системе $\tilde{S}$, записанные в координатах S,

$v_{пер}, w_{пер}$ – *переносная* скорость и *переносное* ускорение, т.е. скорость и ускорение в момент t точки $\tilde{A}_t$ в системе S.

Задача анализа сложного движения заключается в том, чтобы найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки A.

2.2. Теорема о сложении скоростей и ускорений.

В обозначениях и терминах предыдущего пункта

$$v_{абс} = v_{пер} + v_{отн}, \tag{2.1}$$

$$w_{абс} = w_{пер} + w_{отн} + w_{кор}, \tag{2.2}$$

где $w_{кор}$ – ускорение Кориолиса[1] (кориолисово ускорение)

$$w_{кор} = 2\dot{B}\dot{\tilde{r}}_{\tilde{O}A} \ . \tag{2.3}$$

Замечание. Позже мы получим другое представление для кориолисова ускорения: $w_{кор} = 2[\Omega, v_{отн}]$, где Ω – так называемый *вектор мгновенной угловой скорости*, а квадратные скобки обозначают векторное произведение.

Доказательство теоремы. Представим радиус-вектор точки A в виде:

$$r = r_{OA} = r_{O\tilde{O}} + r_{\tilde{O}A} = r_{O\tilde{O}} + B\tilde{r}_{\tilde{O}A}.$$

Для нахождения скорости и ускорения продифференцируем это равенство дважды по времени:

$$v_{абс} = \dot{r}_{O\tilde{O}} + \dot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}A} + B\dot{\tilde{r}}_{\tilde{O}A} = \dot{r}_{O\tilde{O}} + \dot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}A} + v_{отн}, \tag{2.4}$$

$$w_{абс} = \ddot{r}_{O\tilde{O}} + \ddot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}A} + 2\dot{B}\dot{\tilde{r}}_{\tilde{O}A} + B\ddot{\tilde{r}}_{\tilde{O}A} = \ddot{r}_{O\tilde{O}} + \ddot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}A} + w_{кор} + w_{отн}. \tag{2.5}$$

Остается проверить, что первые два слагаемых в правых частях этих формул составляют, соответственно, переносную скорость и переносное ускорение точки A, т.е. скорость и ускорение $\tilde{A}_t$ относительно S. Для нахождения $v_{\tilde{A}_t}, w_{\tilde{A}_t}$

---

[1] Кориоли'с Гюстав Гаспар (1792 – 1843) – французский механик.

воспользуемся теми же формулами (2.4), (2.5), заметив, что в них теперь слагаемые $v_{отн}, w_{отн}, w_{кор}$ равны нулю, так как точка $\tilde{A}_t$ относительно $\tilde{S}$ неподвижна. Кроме того, $\tilde{r}_{\tilde{O}\tilde{A}_t} = \tilde{r}_{\tilde{O}A}$, поскольку в момент t положения точек $\tilde{A}_t$ и A совпадают. Итак,

$$v_{пер} = v_{\tilde{A}_t} = \dot{r}_{o\tilde{o}} + \dot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}A}, \tag{2.6}$$

$$w_{пер} = w_{\tilde{A}_t} = \ddot{r}_{O\tilde{O}} + \ddot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}A}. \tag{2.7}$$

Вместе с (2.4), (2.5) это дает (2.1), (2.2). Теорема доказана.

2.3. Пример: движение точки обода колеса.

Железнодорожный вагон движется прямолинейно с постоянной скоростью v_0 (без проскальзывания колес по рельсам). Требуется определить скорость и ускорение точки A обода колеса в зависимости от угла $\tilde{\varphi}$ поворота луча $\tilde{O}x$ против часовой стрелки до совпадения с лучом $\tilde{O}A$.

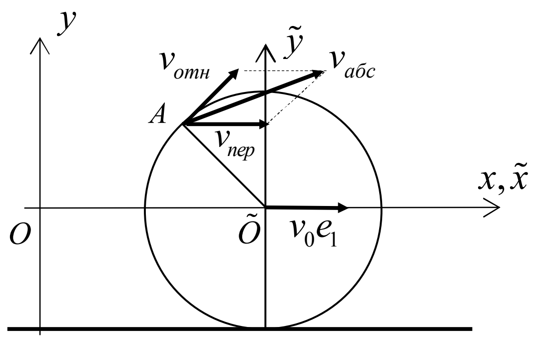

Рис. 8

Неподвижную и подвижную системы отсчета выберем так, как показано на рисунке (ось Oz не показана, так как движение происходит в плоскости $z = 0$). Тогда точка $\tilde{A}_t$ неподвижна относительно корпуса вагона. Поэтому

$$v_{пер} = v_0 e_1, \ w_{пер} = 0. \tag{2.8}$$

Относительная скорость есть скорость вращения вокруг точки $\tilde{O}$ с угловой скоростью $\dot{\tilde{\varphi}}$. В соответствии со вторым частным случаем в 1.8,

$$v_{отн} = \tilde{\rho}_0 \dot{\tilde{\varphi}} e_{\tilde{\varphi}}, \tag{2.9}$$

$$w_{отн} = -\tilde{\rho}_0 \dot{\tilde{\varphi}}^2 e_{\tilde{\rho}} + \tilde{\rho}_0 \ddot{\tilde{\varphi}} e_{\tilde{\varphi}} \tag{2.10}$$

($\tilde{\rho}_0$ – радиус колеса). Напомним (см. 1.7), что

$$e_{\tilde\rho} = \begin{pmatrix} \cos\tilde\varphi \\ \sin\tilde\varphi \end{pmatrix},\ e_{\tilde\varphi} = \frac{de_{\tilde\rho}}{d\tilde\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\tilde\varphi \\ \cos\tilde\varphi \end{pmatrix}.$$

Для нахождения $\dot{\tilde\varphi}$ заметим, что у точки обода колеса, занимающей в момент t крайнее нижнее положение, угловая скорость та же ($\dot{\tilde\varphi}$), а абсолютная скорость равна нулю, так как колесо катится без скольжения. Поэтому, учитывая то, что для крайней нижней точки колеса $e_{\tilde\varphi} = e_1$, по формулам (2.1), (2.8), (2.9) получаем:

$$0 = v_0 e_1 + \tilde\rho_0 \dot{\tilde\varphi} e_1 \Rightarrow \dot{\tilde\varphi} = -\frac{v_0}{\tilde\rho_0}, \ddot{\tilde\varphi} = 0. \tag{2.11}$$

По тем же формулам теперь для точки A имеем:

$$v_{абс} = v_0 e_1 - v_0 e_{\tilde\varphi} = v_0\left(e_1 - e_{\tilde\varphi}\right). \tag{2.12}$$

Для нахождения абсолютного ускорения заметим, что $w_{кор} = 0$, так как в данном случае B есть единичная матрица и, следовательно, $\dot B = 0$. Отсюда и из (2.2), (2.8), (2.10), (2.11) получаем:

$$w_{абс} = -\frac{v_0^2}{\tilde\rho_0} e_{\tilde\rho}. \tag{2.13}$$

Интересно отметить, что скорость точки A всегда (кроме крайних нижнего и верхнего положений) направлена по прямой, соединяющей эту точку с крайней верхней точкой колеса, т.е. коллинеарна вектору $e_2 - e_{\tilde\rho}$. В этом легко убедиться, проверив, что определитель, составленный из координат векторов $e_1 - e_{\tilde\varphi}$ и $e_2 - e_{\tilde\rho}$, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1+\sin\tilde\varphi & -\cos\tilde\varphi \\ -\cos\tilde\varphi & 1-\sin\tilde\varphi \end{vmatrix} = 1 - \sin^2\tilde\varphi - \cos^2\tilde\varphi = 0.$$

2.4. Пример: движение точки, скользящей по колесу.

Предположим, что в условиях предыдущей задачи точка A скользит по радиусу колеса от обода к центру с постоянной скоростью величины v_1. В таком случае

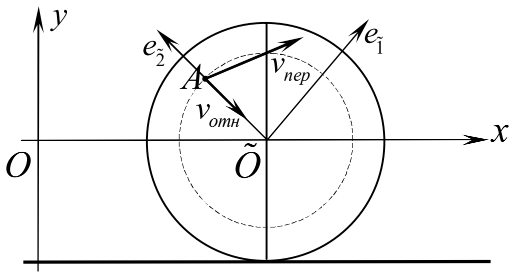

Рис. 9

удобно выбрать подвижную систему, жестко связанную с колесом: $e_{\tilde 2}=e_{\tilde\rho}, e_{\tilde 1}=-e_{\tilde\varphi}$ – см. Рис. 9. Нетрудно видеть, что

$$v_{отн}=-v_1 e_{\tilde\rho},\ w_{отн}=0\,.$$

Переносные характеристики в данной задаче по существу совпадают с абсолютными из предыдущей задачи с тем лишь изменением, что расстояние от точки $\tilde A_t$ до центра колеса равно не $\tilde\rho_0$, а $\tilde\rho=\tilde\rho_0-v_1 t$. Внеся это изменение в (2.9), (2.10), мы могли бы воспользоваться результатами предыдущего пункта.

Однако здесь мы вычислим переносные характеристики непосредственно, для чего применим формулы (2.6), (2.7). В данном случае:

$$\tilde r_{\tilde OA}=\tilde\rho\tilde e_{\tilde 2}=\tilde\rho e_2, B=(-e_{\tilde\varphi},e_{\tilde\rho}), \dot B=\dot{\tilde\varphi}(e_{\tilde\rho},e_{\tilde\varphi}), \ddot B=\dot{\tilde\varphi}^2(e_{\tilde\varphi},-e_{\tilde\rho})\,.$$

В последней формуле учтено то, что, по (2.11), $\ddot{\tilde\varphi}=0$. Поэтому

$$v_{пер}=v_0 e_1+\dot B\tilde\rho\tilde e_{\tilde 2}=v_0 e_1+\tilde\rho\dot{\tilde\varphi}(e_{\tilde\rho},e_{\tilde\varphi})e_2=v_0(e_1-\frac{\tilde\rho}{\tilde\rho_0}e_{\tilde\varphi}),$$

$$v_{абс}=v_0(e_1-\frac{\tilde\rho}{\tilde\rho_0}e_{\tilde\varphi})-v_1 e_{\tilde\rho}\,. \tag{2.14}$$

Заметим, что при $v_1=0$ это совпадает с (2.12).

Переносное ускорение найдем с помощью формулы из второго частного случая в 1.8:

$$w_{пер}=-\tilde\rho\dot{\tilde\varphi}^2 e_{\tilde\rho}=-(\tilde\rho_0-v_1 t)\frac{v_0^2}{\tilde\rho_0^2}e_{\tilde\rho}\,.$$

Наконец, ускорение Кориолиса вычислим непосредственно по формуле (11):

$$w_{кор}=2\dot B\dot{\tilde r}_{\tilde OA}=2\dot{\tilde\varphi}(e_{\tilde\rho},e_{\tilde\varphi})\frac{d}{dt}\tilde\rho\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-2\dot{\tilde\varphi}v_1 e_{\tilde\varphi}\,.$$

Итак,

$$w_{абс} = -(\tilde{\rho}_0 - v_1 t)\frac{v_0^2}{\tilde{\rho}_0^2} e_{\tilde{\rho}} - 2\dot{\tilde{\varphi}} v_1 e_{\tilde{\varphi}}. \tag{2.15}$$

При $v_1 = 0$ вновь получаем (2.13).

2.5. Непосредственный анализ сложного движения.

Анализ сложного движения всегда можно провести без использования теоремы о сложении скоростей и ускорений, а просто на основе представления радиус-вектора точки в виде

$$r_{OA} = r_{O\tilde{O}} + r_{\tilde{O}A}.$$

Например, в задаче из предыдущего пункта, как нетрудно видеть,

$$r_{OA} = v_0 t e_1 + (\tilde{\rho}_0 - v_1 t) e_{\tilde{\rho}}.$$

Следовательно,

$$v_{абс} = \dot{r}_{OA} = v_0 e_1 - v_1 e_{\tilde{\rho}} + (\tilde{\rho}_0 - v_1 t)\dot{e}_{\tilde{\rho}} = v_0 e_1 - v_1 e_{\tilde{\rho}} + (\tilde{\rho}_0 - v_1 t)\dot{\tilde{\varphi}} e_{\tilde{\varphi}},$$

что совпадает с (2.14). Повторным дифференцированием находим ускорение:

$$w_{абс} = -v_1 \dot{\tilde{\varphi}} e_{\tilde{\varphi}} - v_1 \dot{\tilde{\varphi}} e_{\tilde{\varphi}} + (\tilde{\rho}_0 - v_1 t)\dot{\tilde{\varphi}}^2 (-e_{\tilde{\rho}})$$

(здесь учтено, что $\ddot{\tilde{\varphi}} = 0$). Результат совпадает с (2.15).

В некоторых ситуациях использование теоремы о сложении скоростей и ускорений приводит к результату значительно проще, чем непосредственный анализ – см., например, п. 3.9.

3. Кинематика твердого тела

3.1. Скорости и ускорения точек твердой среды.

Пусть $\Sigma -$неподвижная, $\tilde{\Sigma} -$ подвижная твердые среды S, $\tilde{S} -$ декартовы системы отсчета в этих средах. Скорость и ускорение любой точки $\tilde{A} \in \tilde{\Sigma}$ можно найти с помощью формул (2.4), (2.5):

$$v_{\tilde{A}} = \dot{r}_{\tilde{O}} + \dot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}\tilde{A}}, \tag{3.1}$$

$$w_{\tilde{A}} = \ddot{r}_{\tilde{O}} + \ddot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}\tilde{A}}. \tag{3.2}$$

Относительные скорость и ускорение, а также кориолисово ускорение равны нулю, поскольку точка $\tilde{A}$ неподвижна относительно $\tilde{S}$.

Формулы (3.1), (3.2) иногда удобно записывать в виде

$$v_{\tilde{O}\tilde{A}} = \dot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}\tilde{A}} = \dot{B}B^T r_{\tilde{O}\tilde{A}}, \tag{3.3}$$

$$w_{\tilde{O}\tilde{A}} = \ddot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}\tilde{A}}. \tag{3.4}$$

Вместо скоростей и ускорений отмеченных точек в этой записи используются *скорость и ускорение отмеченного вектора*:

$$v_{\tilde{O}\tilde{A}} := \dot{r}_{\tilde{O}\tilde{A}} = \dot{r}_{O\tilde{A}} - \dot{r}_{O\tilde{O}} = v_{\tilde{A}} - v_{\tilde{O}}, \tag{3.5}$$

$$w_{\tilde{O}\tilde{A}} := \ddot{r}_{\tilde{O}\tilde{A}} = \ddot{r}_{O\tilde{A}} - \ddot{r}_{O\tilde{O}} = w_{\tilde{A}} - w_{\tilde{O}}. \tag{3.6}$$

Эти характеристики, очевидно, зависят только от ортов системы S, в то время как соответствующие характеристики отмеченных точек зависят также от выбора начала отсчета.

В формулах (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) используется матрица B перехода от координат в системе $\tilde{S}$ к координатам в системе S. Напомним из курса алгебры, что эта матрица при любом t обладает следующими свойствами:

(а) ее столбцы (и ее строки) образуют ортонормированную систему векторов;

(б) ее определитель равен +1;

(в) обратная к ней матрица совпадает с транспонированной: $B^{-1} = B^{\mathrm{T}}$.

Свойство (а) означает, что девять элементов матрицы B связаны шестью соотношениями, определяющими длины ее столбцов-векторов и углы между ними. Поэтому можно ожидать, что «вращение» подвижной системы отсчета относительно неподвижной можно задать *тремя* независимыми параметрами. И действительно, в пункте 3.6 будет доказана теорема Эйлера, которая позволяет для вычисления скорости вместо матрицы B использовать вектор $\Omega \in \mathbb{R}^3$, называемый *вектором мгновенной угловой скорости* (*короче – угловой скоростью*) *среды* $\tilde{\Sigma}$ *относительно* S.

Изучению общего случая движения твердой среды мы предпошлем рассмотрение двух частных случаев – *поступательного движения* и *вращения вокруг неподвижной оси.*

3.2. Поступательное движение.

Поступательным называется такое движение твердой среды, при котором скорости всех ее точек одинаковы. Очевидно, при поступательном движении любой отрезок $\tilde{A}\tilde{B} \subset \tilde{\Sigma}$ перемещается параллельно самому себе, так как $\dot{r}_{\tilde{A}\tilde{B}} = v_{\tilde{B}} - v_{\tilde{A}} = 0$, т.е. $r_{\tilde{A}\tilde{B}} = const$. С другой стороны, *достаточным признаком поступательного движения является то, что в среде существуют два неколлинеарных отрезка, которые перемещаются параллельно самим себе.*

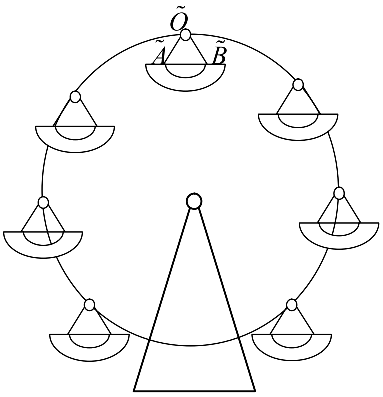

Рис. 10

▷ Действительно, пусть $\dot{r}_{\tilde{A}\tilde{B}} = \dot{r}_{\tilde{C}\tilde{D}} = 0$ и векторы $r_{\tilde{A}\tilde{B}}, r_{\tilde{C}\tilde{D}}$ не коллинеарны. Рассмотрим еще вектор $r_{\tilde{E}\tilde{F}} = \left[r_{\tilde{A}\tilde{B}}, r_{\tilde{C}\tilde{D}} \right]$. Его скорость также равна нулю, поскольку

$$\dot{r}_{\tilde{E}\tilde{F}} = \left[\dot{r}_{\tilde{A}\tilde{B}}, r_{\tilde{C}\tilde{D}} \right] + \left[r_{\tilde{A}\tilde{B}}, \dot{r}_{\tilde{C}\tilde{D}} \right].$$

Любой вектор $r_{\tilde{G}\tilde{H}}$ данной среды можно линейно выразить через $r_{\tilde{A}\tilde{B}}, r_{\tilde{C}\tilde{D}}, r_{\tilde{E}\tilde{F}}$. Поэтому из (3.3) следует, что

$$v_{\tilde{G}\tilde{H}} = \dot{B}B^T \left(\alpha r_{\tilde{A}\tilde{B}} + \beta r_{\tilde{C}\tilde{D}} + \gamma r_{\tilde{E}\tilde{F}} \right) = \alpha v_{\tilde{A}\tilde{B}} + \beta v_{\tilde{C}\tilde{D}} + \gamma v_{\tilde{E}\tilde{F}} = 0.$$

◁

В качестве примера можно привести движение твердой среды, связанной с любой кабиной «колеса обзора» (см. Рис. 10). Очевидно, неколлинеарные отрезки $\tilde{O}\tilde{A}$ и $\tilde{O}\tilde{B}$ перемещаются параллельно самим себе.

3.3. Вращение вокруг неподвижной прямой.

Если в среде $\tilde{\Sigma}$ имеются две различные точки $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2$, которые неподвижны относительно S, то движение среды называется *вращением вокруг неподвижной прямой, проходящей через эти точки.*

В этом случае любая точка $\tilde{O}$ прямой $\tilde{O}_1\tilde{O}_2$ неподвижна относительно S:

$$v_{\tilde{O}} = \dot{r}_{O\tilde{O}} = \dot{r}_{O\tilde{O}_1} + \dot{r}_{\tilde{O}_1\tilde{O}} = \dot{r}_{O\tilde{O}_1} + \alpha\dot{r}_{\tilde{O}_1\tilde{O}_2} = v_{\tilde{O}_1} + \alpha(v_{\tilde{O}_2} - v_{\tilde{O}_1}) = 0.$$

Будем считать, что неподвижная и подвижная декартовы системы S и $\tilde{S}$ с общей начальной точкой $\tilde{O} = O$ на данной прямой выбраны так, что орты e_z и $e_{\tilde{z}}$ совпадают и коллинеарны оси $\tilde{O}_1\tilde{O}_2$. Пусть (ρ,φ,z) – цилиндрические координаты точки $\tilde{A} \in \tilde{\Sigma}$ относительно S, r – ее радиус-вектор в S. Тогда (см. (1.5))

$$r = \rho e_\rho + z e_z,$$

причем ρ, z, e_z не зависят от t. Поэтому

$$v = \dot{r} = \rho\dot{\varphi}e_\varphi = \rho\omega e_\varphi. \tag{3.7}$$

Отметим, что угловая скорость ω одинакова для всех точек подвижной среды, поскольку полярные углы ее точек отличаются друг от друга на константы. Вектор e_φ, очевидно, можно представить в виде:

$$e_\varphi = \left[e_z, e_\rho\right]. \tag{3.8}$$

Определим *вектор угловой скорости* Ω *среды* $\tilde{S}$ относительно S равенством

$$\Omega = \omega e_z.$$

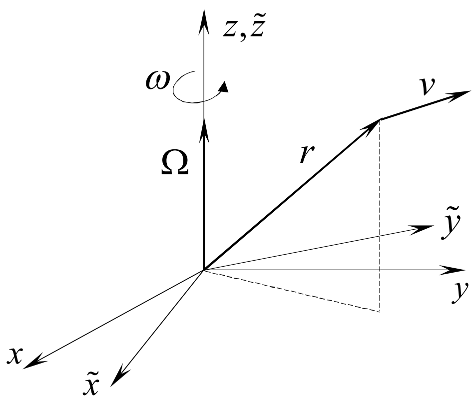

Рис. 11

Тогда из (3.7) и (3.8) следует, что скорость любой точки подвижной среды выражается через ее радиус-вектор равенством:

$$v = \left[\Omega, r\right]. \tag{3.9}$$

В рассматриваемой ситуации вектор Ω сохраняет постоянное направление, однако его величина и ориентация, задаваемые функцией ω, могут изменяться. Отметим, что с конца этого вектора вращение кажется происходящим против часовой стрелки (т.е. оно совпадает с e_z при $\dot{\varphi} \geq 0$ и с $(-e_z)$ в противном случае).

Ниже будет доказана теорема Эйлера[2], устанавливающая существование вектора мгновенной угловой скорости в случае произвольного движения твердой среды.

3.4. Лемма о кососимметричности.

Матрица $\dot{B}B^T = \dot{B}B^{-1}$ *является кососимметрической, т.е.*

$$(\dot{B}B^T)^T = -\dot{B}B^T. \qquad (3.10)$$

⊳ Продифференцировав по времени тождество

$$I = BB^T,$$

получим:

$$0 = \dot{B}B^T + B\dot{B}^T = \dot{B}B^T + (\dot{B}B^T)^T.$$

Отсюда следует (3.10). ⊲

3.5. Лемма о кососимметрической матрице.

Если M – *кососимметрическая* (3×3)*-матрица, то существует такой вектор* $\Omega \in \mathbb{R}^3$*, что равенство*

$$Mq = [\Omega, q] \qquad (3.11)$$

выполняется для любого $q \in \mathbb{R}^3$.

⊳ Кососимметрическую матрицу M можно записать в виде:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Mq = \begin{pmatrix} aq_2 + bq_3 \\ -aq_1 + cq_3 \\ -bq_1 - cq_2 \end{pmatrix}.$$

Векторное произведение в правой части (3.11) вычислим по известной формуле:

---

[2] Эйлер Леонард (1707 - 1783) – математик, механик, физик и астроном. Швейцарец; с 1727 по 1741 и с 1766 по 1783 работал в Петерб. АН. Автор свыше 800 работ по мат. анализу, дифф. геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, мат. физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др.

$$[\Omega,q]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} \Omega_2 q_3-\Omega_3 q_2 \\ \Omega_3 q_1-\Omega_1 q_3 \\ \Omega_1 q_2-\Omega_2 q_1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая последние два равенства, видим, что для выполнения (3.11) достаточно положить $\Omega_3=-a, \Omega_2=b, \Omega_1=-c$. $\triangleleft$

3.6. Теорема Эйлера о скоростях точек твердой среды.

Пусть $S-$ *«неподвижная» декартова система отсчета,* $\tilde{\Sigma}-$ *«подвижная» твердая среда. Утверждается, что для любого момента* t *существует единственный вектор* $\Omega\in\mathbb{R}^3$*, такой, что для любых точек* $\tilde{P},\tilde{A}\in\tilde{\Sigma}$ *скорость вектора* $r_{\tilde{P}\tilde{A}}$ *представляется в виде*

$$v_{\tilde{P}\tilde{A}}=[\Omega,r_{\tilde{P}\tilde{A}}] \tag{3.12}$$

и, следовательно, скорость точки $\tilde{A}-$ *в виде*

$$v_{\tilde{A}}=v_{\tilde{P}}+[\Omega,r_{\tilde{P}\tilde{A}}].$$

Вектор Ω, существование и единственность которого утверждается в данной теореме, называется *вектором мгновенной угловой скорости твердой среды* $\tilde{\Sigma}$ *по отношению к системе отсчета* S.

$\triangleright$ Доказательство теоремы. В среде $\tilde{\Sigma}$ зафиксируем некоторую декартову систему отсчета $\tilde{S}$. Из доказанных выше двух лемм вытекает существование такого вектора $\Omega\in\mathbb{R}^3$, что для любого $q\in\mathbb{R}^3$ справедливо равенство

$$\dot{B}B^T q=[\Omega,q]. \tag{3.13}$$

Тогда по формуле (3.3) получаем:

$$v_{\tilde{P}\tilde{A}}=\dot{B}B^T r_{\tilde{P}\tilde{A}}=[\Omega,r_{\tilde{P}\tilde{A}}].$$

Итак, существование вектора мгновенной угловой скорости доказано. Для доказательства единственности предположим, что формула (3.12) в какой-то момент верна также при замене Ω на некоторый вектор $\tilde{\Omega}$. Тогда скорость единичного вектора $e = r_{\tilde{P}\tilde{E}}$, ортогонального в этот момент времени векторам Ω и $\tilde{\Omega}$, можно вычислить дважды:

$$v_e = [\Omega, e] = [\tilde{\Omega}, e].$$

Отсюда следует, что $[\Omega - \tilde{\Omega}, e] = 0$ и, поскольку сомножители взаимно ортогональны и $|e| = 1$, справедливо равенство $\Omega - \tilde{\Omega} = 0$, т.е. $\Omega = \tilde{\Omega}$. ◁

Подчеркнем, что утверждение о единственности вектора Ω означает, в частности, что он *не зависит* от выбора в $\tilde{\Sigma}$ системы отсчета $\tilde{S}$, хотя нашли мы его по матрице $\dot{B}B^T$, а матрица B *зависит* от этой системы.

3.7. Следствие о переносной вращательной скорости и ускорении Кориолиса.

При сложном движении (см. 2.1, 2.2) переносная скорость и кориолисово ускорение точки A выражаются с помощью вектора Ω мгновенной угловой скорости среды $\tilde{\Sigma}$, неподвижной относительно $\tilde{S}$, формулами:

$$v_{пер} = v_{\tilde{O}} + [\Omega, r_{\tilde{O}A}], \;\; w_{кор} = 2[\Omega, v_{отн}]. \qquad (3.14)$$

▷ Это вытекает из (2.6), (2.3) и (3.13). ◁

Первое слагаемое в выражении переносной скорости называется *поступательной,* а второе – *вращательной переносной скоростью.*

3.8. Свойства вектора мгновенной угловой скорости.

Пусть S – «неподвижная» декартова система отсчета, $\tilde{\Sigma}$ – «подвижная» твердая среда, Ω – вектор мгновенной угловой скорости. Тогда справедливы следующие утверждения 0) – 3).

0) $\Omega = 0 \Leftrightarrow$ (*скорости всех точек среды $\tilde{\Sigma}$ в данный момент одинаковы*).

▷ Если $\Omega = 0$, то равенство скоростей любых точек $\tilde{P}, \tilde{A} \in \tilde{\Sigma}$ непосредственно вытекает из теоремы Эйлера. Если, наоборот, известно, что скорости всех точек среды $\tilde{\Sigma}$ в данный момент одинаковы, то формула (3.12) будет верна, если положить $\Omega = 0$. В силу единственности Ω отсюда следует, что $\Omega = 0$. ◁

Доказанное утверждение означает, что необходимым и достаточным признаком мгновенного поступательного движения является равенство нулю мгновенной угловой скорости.

1) *Если* $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2 \in \tilde{\Sigma}$ *то* $v_{\tilde{O}_1} = v_{\tilde{O}_2} \Leftrightarrow r_{\tilde{O}_1\tilde{O}_2} \| \Omega$.

$\triangleright$ $v_{\tilde{O}_1} = v_{\tilde{O}_2} \Leftrightarrow v_{\tilde{O}_1\tilde{O}_2} = 0 \Leftrightarrow [\Omega, r_{\tilde{O}_1\tilde{O}_2}] = 0 \Leftrightarrow \Omega \| r_{\tilde{O}_1\tilde{O}_2}$ $\triangleleft$

Любая прямая в среде $\tilde{\Sigma}$, коллинеарная вектору Ω, называется *мгновенной осью вращения* данной среды. Отмеченное свойство означает, что любая мгновенная ось вращения движется в данный момент поступательно.

2) *Скорость* $v_{\tilde{P}\tilde{A}}$ *любого вектора среды* $\tilde{\Sigma}$ *ортогональна векторам* Ω *и* $r_{\tilde{P}\tilde{A}}$ *(и, следовательно, плоскости* Π*, содержащей эти векторы).*

$\triangleright$ Это следует из теоремы Эйлера, поскольку векторное произведение $[\Omega, r_{\tilde{P}\tilde{A}}] = v_{\tilde{P}\tilde{A}}$ ортогонально сомножителям. $\triangleleft$

3) (Явная формула для Ω). *Если прямая* $l \subset \tilde{\Sigma}$ *имеет в данный момент поступательное движение и* $\tilde{A} \in \tilde{\Sigma} \setminus l$*, то*

$$\Omega = \frac{[r_{\tilde{a}\tilde{A}}, v_{\tilde{a}\tilde{A}}]}{r_{\tilde{a}\tilde{A}}^2}, \tag{3.15}$$

где $\tilde{a}$ – ортогональная проекция $\tilde{A}$ на l.

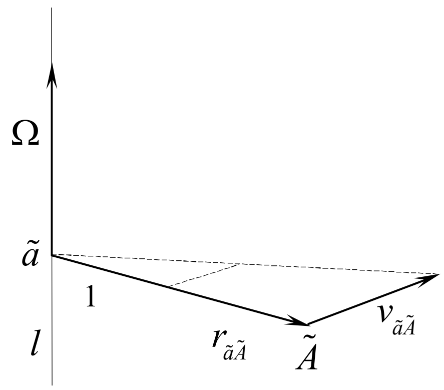

Рис. 12

$\triangleright$ В силу формулы Эйлера (3.12) $[r_{\tilde{a}\tilde{A}}, v_{\tilde{a}\tilde{A}}] = [r_{\tilde{a}\tilde{A}}, [\Omega, r_{\tilde{a}\tilde{A}}]]$. Для преобразования полученного двойного векторного произведения воспользуемся известным из алгебры равенством

$$[a,[b,c]] = b(a,c) - c(a,b). \tag{3.16}$$

Получаем:

$$[r_{\tilde{a}\tilde{A}}, [\Omega, r_{\tilde{a}\tilde{A}}]] = \Omega r_{\tilde{a}\tilde{A}}^2 - r_{\tilde{a}\tilde{A}}(r_{\tilde{a}\tilde{A}}, \Omega).$$

Но $(r_{\tilde{a}\tilde{A}}, \Omega) = 0$, так как $r_{\tilde{a}\tilde{A}} \perp l$ и, по свойству 2), $l \| \Omega$. Итак, числитель в (3.15) равен $\Omega r_{\tilde{a}\tilde{A}}^2$, и утверждение доказано. $\triangleleft$

3.9. Пример: правый берег круче левого.

Замечено, что у рек Северного полушария, текущих в меридиональном направлении (на север или на юг), правый берег круче левого, а у рек Южного полушария - наоборот.

Оказывается, в этом «повинно» кориолисово ускорение, точнее, сила, создающая это ускорение. Связь между ускорениями материальных точек и создающими их силами изучается разделом механики, который называется *динамикой*. Здесь мы воспользуемся вторым законом Ньютона, известным из школьного курса физики – произведение массы материальной точки на вектор ее ускорения равно силе, которая действует на точку: $m \cdot w = F$.

Рассмотрим явление более подробно. Река, текущая вдоль меридиана, участвует в сложном движении: с юга на север (к примеру) по отношению к Земле и в суточном вращении вместе с Землей вокруг ее оси. Выберем «неподвижную» систему отсчета так, чтобы точка O находилась в центре Земли, вектор e_3 был направлен вдоль земной оси к северу, а векторы e_1 и e_2 – на некоторые «неподвижные» звезды. Отличие «подвижной» системы от выбранной таким образом «неподвижной» будет заключаться в том, что вектор $e_{\tilde{1}}$ будем считать направленным из центра Земли на меридиан, вдоль которого течет река, а $e_{\tilde{2}}$ – от этого меридиана на восток. Таким образом, система $\tilde{S}$ жестко связана с телом Земли.

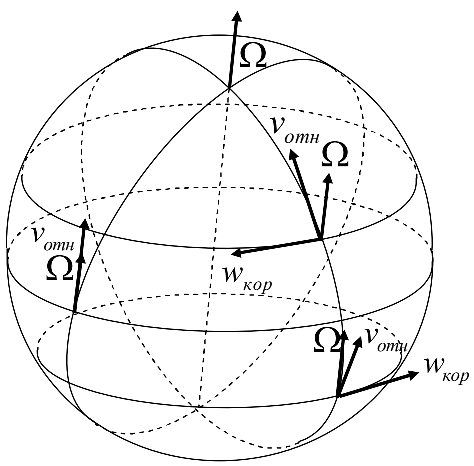

Рис. 13

Переносное и относительное движения частиц воды в реке представляют собой равномерные движения по окружностям: первое – по соответствующей земной параллели со скоростью суточного вращения Земли на данной широте, второе – по земному меридиану со скоростью речного течения. В соответствии с третьим частным случаем в 1.8, ускорения в этих движениях направлены к земной оси (второе – к центру), поэтому силы, вызывающие эти ускорения, лежат в плоскости меридиана и не могут вызывать большее подмывание одного из берегов.

Ускорение Кориолиса найдем как удвоенное векторное произведение вектора мгновенной угловой скорости Ω на относительную скорость $v_{отн}$. Вектор Ω находим по алгоритму, описанному в пункте 3.3. Во-первых, он направлен по земной оси, так как точки этой оси имеют ту же скорость, что и $\tilde{O} = O$ (нулевую). Во-вторых, он ориентирован к северному полюсу, так как Солнце у нас восходит на востоке, т.е. Земля вращается с запада на восток, т.е. от Полярной звезды ее вращение происходит против часовой стрелки. Наконец, по величине он равен $2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60 - 4 \cdot 60 + 4)$, так как знаменатель этой дроби – период вращения Земли по отношению к неподвижным звездам в секундах. Четыре возможных варианта расположения векторов Ω, $v_{отн}$ и $w_{кор}$ изображены на Рис. 13. Рисунок показывает, что в северном полушарии ускорение Кориолиса всегда направлено к левому берегу. Следовательно, поддерживающая его сила создается правым берегом, который по этой причине и подмывается водой сильнее, чем левый. В южном полушарии картина симметрична, что приводит к большему подмыванию левого берега по сравнению с правым.

Приведенный выше расчет показывает, что величина кориолисова ускорения в данной ситуации весьма мала, однако при большой массе воды для его создания требуется значительная сила, так что на крупных реках эффект большего подмыва соответствующего берега заметен вполне определенно.

3.10. Об инерциальных системах отсчета.

Как уже говорилось, понятия «неподвижной» и «подвижной» систем отсчета относительны. Можно ли в предыдущем пункте в качестве «неподвижной» системы взять такую, которая вращается вокруг земной оси со скоростью, вдвое превышающей скорость вращения Земли? Каким при этом будет ускорение Кориолиса?

Нетрудно видеть, что подвижная система отсчета при этом сменит направление вращения на противоположное. Поэтому вектор Ω будет направлен уже не к северному, а к южному полюсу, а ускорение Кориолиса в северном полушарии не к левому берегу, а к правому. Как же быть с тем географически бесспорным фактом, что правый берег все-таки круче левого?

Этот «парадокс» разрешается просто: второй закон Ньютона, определяющий связь между силами и ускорениями, справедлив не в любых системах отсчета, а только в особых, называемых «инерциальными»; вновь выбранная «неподвижная» система отсчета инерциальной не является.

3.11. Плоскопараллельное движение.

Движение твердой среды $\tilde{\Sigma}$ относительно декартовой системы отсчета S называется *плоскопараллельным*, если существует такое двумерное подпространство Π_0 пространства $\mathbb{R}^3$, что скорости всех точек данной среды в любой момент времени лежат в этом подпространстве: $\forall(t \in \mathbb{R}, \tilde{A} \in \tilde{\Sigma})[v_{\tilde{A}}(t) \in \Pi_0]$. Например, если железнодорожный вагон движется по прямолинейному участку пути, то мы имеем плоскопараллельное движение разных твердых сред, связанных, соответственно, с корпусом вагона и с его колесами, так как скорости всех точек корпуса вагона и его колес (и осей) лежат в вертикальной плоскости, параллельной рельсам. При этом корпус вагона совершает движение еще более частного вида - *прямолинейное*, при котором скорости всех точек лежат в одномерном подпространстве пространства $\mathbb{R}^3$, т.е. коллинеарны фиксированной прямой.

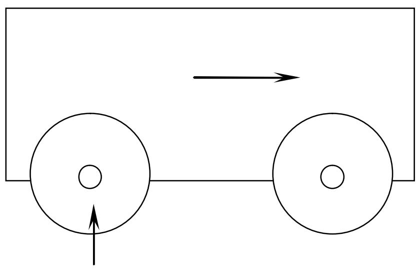

Рис. 14

Плоскопараллельное движение на некотором промежутке времени можно эквивалентно определить как такое, при котором траектория любой точки сре-

ды лежит в плоскости, параллельной фиксированному двумерному подпространству Π_0 *пространства* $\mathbb{R}^3$.

$\triangleright$ Действительно, если $v_{\tilde{A}}(t) \in \Pi_0$ при всех t из рассматриваемого промежутка, то

$$r_{\tilde{A}}(t) = r_{\tilde{A}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_{\tilde{A}}(s)ds \in r_{\tilde{A}}(t_0) + \Pi_0,$$

т.е. траектория лежит в плоскости, параллельной Π_0. Наоборот, если $r_{\tilde{A}}(t)$ постоянно лежит в плоскости $r_{\tilde{A}}(t_0) + \Pi_0$, то $v_{\tilde{A}}(t) = \dot{r}_{\tilde{A}}(t) \in \Pi_0$. $\triangleleft$

Плоскопараллельное движение может быть поступательным (например, описанное выше движение корпуса вагона) и непоступательным (движение колеса вагона). Поступательное движение не обязательно является плоскопараллельным. Например, если опора колеса обзора перемещается прямолинейно в направлении, перпендикулярном плоскости колеса, то движения кабинок остаются поступательными, однако они не будут плоскопараллельными. Действительно, в этом случае траектория точки подвеса кабины движется по винтовой линии, которая не является плоской.

Нетрудно видеть, что при *плоскопараллельном движении:*

(а) вектор Ω *остается коллинеарным некоторому постоянному вектору* l;

(б) скорость любой точки $\tilde{O} \in \tilde{\Sigma}$ *ортогональна* l.

$\triangleright$ Действительно, через l обозначим вектор, перпендикулярный плоскости Π_0. Тогда свойство (б) очевидно; покажем, что $\Omega \| l$. Для случая нулевого Ω это соотношение тривиально, поэтому будем считать, что $\Omega \neq 0$. В среде $\tilde{\Sigma}$ рассмотрим такие две различные точки $\tilde{A}, \tilde{B}$, что $r_{\tilde{A}\tilde{B}} \in \Pi_0$ и $r_{\tilde{A}\tilde{B}} \perp \Omega$. Тогда $v_{\tilde{A}\tilde{B}} = [\Omega, r_{\tilde{A}\tilde{B}}], |v_{\tilde{A}\tilde{B}}| = |\Omega| \cdot |r_{\tilde{A}\tilde{B}}| \neq 0$, $v_{\tilde{A}\tilde{B}} \perp \Omega$, $v_{\tilde{A}\tilde{B}} \perp r_{\tilde{A}\tilde{B}}$ и $v_{\tilde{A}\tilde{B}} = v_{\tilde{B}} - v_{\tilde{A}} \in \Pi_0$. Итак, вектор Ω ортогонален двум ненулевым ортогональным друг другу векторам $r_{\tilde{A}\tilde{B}}, v_{\tilde{A}\tilde{B}}$, лежащим в Π_0. Следовательно, $\Omega \perp \Pi_0$, т.е. $\Omega \| l$. $\triangleleft$

Заметим, что *для непоступательного плоскопараллельного движения существование ненулевого постоянного вектора, обладающего отмеченными двумя свойствами, является и достаточным признаком, причем свойство (б) достаточно проверить для одной какой-нибудь точки* $\tilde{O} \in \tilde{\Sigma}$.

⊳ Π_0 можно определить как подпространство, ортогональное вектору l. Тогда для любой точки $\tilde{A} \in \tilde{\Sigma}$ будем иметь:

$$v_{\tilde{A}} = v_{\tilde{O}} + v_{\tilde{O}\tilde{A}} = v_{\tilde{O}} + [\Omega, r_{\tilde{O}\tilde{A}}].$$

В последней сумме оба слагаемых ортогональны l (второе по той причине, что оно ортогонально ненулевому вектору Ω, который коллинеарен l). Следовательно, $v_{\tilde{A}} \in \Pi_0$. ⊲

3.12. Мгновенный центр скоростей.

При непоступательном плоскопараллельном движении твердой среды в любой момент времени в ней имеется точка с нулевой скоростью. В каждой плоскости, параллельной Π_0*, такая точка единственна.*

⊳ Искомую точку $\tilde{C}$ можно определить по формуле:

$$r_{\tilde{C}\tilde{O}} = [\Omega, v_{\tilde{O}}] / \Omega^2. \tag{3.17}$$

Тогда

$$v_{\tilde{C}} = v_{\tilde{O}} + v_{\tilde{O}\tilde{C}} = v_{\tilde{O}} + [\Omega, r_{\tilde{O}\tilde{C}}] = v_{\tilde{O}} + [\Omega, [\Omega, v_{\tilde{O}}]] / \Omega^2.$$

По свойству двойного векторного произведения (3.16)

$$[\Omega, [\Omega, v_{\tilde{O}}]] = \Omega(\Omega, v_{\tilde{O}}) - v_{\tilde{O}}\Omega^2.$$

Поскольку $v_{\tilde{O}} \perp \Omega$, из двух последних формул получаем: $v_{\tilde{C}} = v_{\tilde{O}} - v_{\tilde{O}} = 0$.

Если бы в плоскости, определенной точками $\tilde{O}, \tilde{C}$ и вектором $v_{\tilde{O}}$, существовала еще она неподвижная точка $\tilde{D}$, то из соотношений $r_{\tilde{C}\tilde{D}} \neq 0,\ r_{\tilde{C}\tilde{D}} \perp \Omega,\ 0 = v_{\tilde{C}\tilde{D}} = [\Omega, r_{\tilde{C}\tilde{D}}]$ следовало бы, что $\Omega = 0$, т.е. движение среды поступательно. Но это противоречит условию. ⊲

3.13. Геометрический способ нахождения мгновенного центра скоростей.

Если известны скорости двух точек A, B, лежащих в плоскости, параллельной Π_0, то мгновенный центр скоростей C можно найти простым геометрическим способом. Из формулы (3.17) следует, что

$$r_{CA} \perp v_A,\ |r_{CA}| = |\Omega||v_A| / \Omega^2 = |v_A| / |\Omega|;$$
$$r_{CB} \perp v_B,\ |r_{CB}| = |v_B| / |\Omega|.$$

Это означает, что треугольники CAA_1 и CBB_1 имеют прямые углы в вершинах A и B, причем их катеты пропорциональны, т.е. треугольники подобны. Поэтому

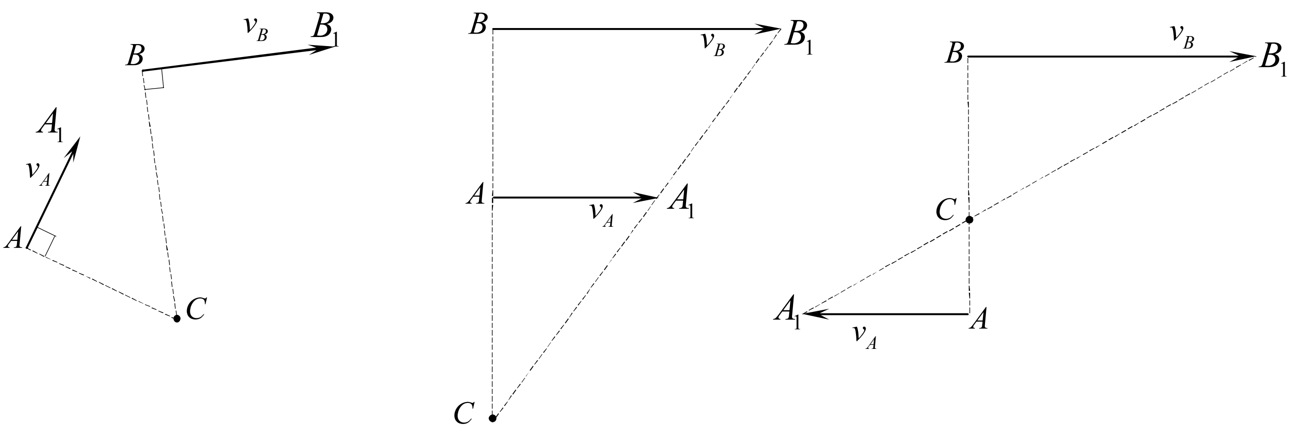

Рис. 15

точку C можно найти так, как показано на Рис. 15.

Помимо трех ситуаций, изображенных на рисунке, возможен еще четвертый случай – когда $v_A = v_B$ (и $A \neq B$). Но в этом случае среда движется поступательно, так как $0 = v_{AB} = [\Omega, r_{AB}],\ r_{AB} \neq 0,\ \Omega \perp r_{AB}$, т.е. $\Omega = 0$.

4. Кинематика светлячков

В этом параграфе мы построим нетрадиционную модель релятивистской кинематики. Роль отмеченных точек в ней будут играть «светлячки», которые в силу своего устройства одновременно являются световыми часами и измерителями расстояний. Светлячки функционируют в полном соответствии с законами классической кинематики, но если измерять время и расстояние с их помощью, то оказывается, что они подчиняются всем законам теории относительности. Во всем существенном описываемая модель основана на [7].

4.1. Эфир и световые сигналы.

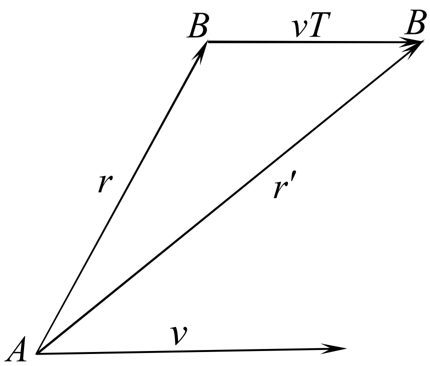

Рис. 16

Будем называть *эфиром* твердую среду E, по отношению к которой световые сигналы распространяются во всех направлениях с одинаковой скоростью $c \approx 300000 км/с$. Найдем время $T = T(A,B,v)$, за которое световой сигнал доходит из отмеченной точки A в отмеченную точку B при условии, что обе точки движутся относительно E со скоростью v. Если $v = 0$, то, очевидно, $T = |r|/c$, где $r = r_{AB}$. В общем случае за время T точка B переместится в положение B' (см. Рис. 16). Световой сигнал за это время должен пройти путь $|r'| = cT$, где $r' = r + vT$. Поэтому T есть (положительный) корень квадратного уравнения

$$c^2T^2 = r^2 + 2(v,r)T + v^2T^2,$$

или

$$(c^2 - v^2)T^2 - 2(v,r)T - r^2 = 0.$$

Всюду в этом параграфе мы считаем, что скорость $|v|$ *любой отмеченной точки строго меньше* c, поэтому единственным положительным корнем данного уравнения будет

$$T(A,B,v) = \frac{(v,r_{AB}) + \sqrt{(v,r_{AB})^2 + r_{AB}^2(c^2 - v^2)}}{c^2 - v^2}. \qquad (4.1)$$

4.2. Светлячок и его такт.

Светлячком будем называть отмеченную точку, окруженную *«оболочкой»* - сферой фиксированного (очень маленького) радиуса ρ. Светлячок периодически испускает световые сигналы таким образом, что каждый следующий сигнал рождается в тот момент, когда возвращается отраженный от оболочки предыдущий. Отраженный сигнал от разных точек оболочки может поступать в разные моменты, рождение следующего сигнала происходит в *первый* из них. *Тактом* светлячка назовем промежуток времени между моментами рождения двух последовательных сигналов. Если светлячок неподвижен относительно эфира, то его такт, как нетрудно видеть, равен $2\rho / c$.

Пусть светлячок A с оболочкой σ_A движется относительно эфира со скоростью v. В соответствии с определением, его такт τ_A есть минимум сумм $T(A,B,v)+T(B,A,v)$ по всем $B\in\sigma_A$. Поскольку $r_{BA}=-r_{AB}$ и $r^2=\rho^2$, из формулы (4.1) получаем, что τ_A есть минимальное значение величины

$$\frac{2\sqrt{(v,r)^2+\rho^2(c^2-v^2)}}{c^2-v^2}.$$

Оно достигается, когда $(v,r)=0$, т.е. $r\perp v$, и определяется формулой

$$\tau_A=\frac{2\rho}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{4.2}$$

где

$$\beta=\frac{|v|}{c}.$$

Из (4.2) следует, что такт светлячка с увеличением $|v|$ от 0 до c увеличивается от $2\rho / c$ до бесконечности.

4.3. События, их место и время.

Событием называют то, что наблюдается в определенном месте в определенное время. Это определение сродни определению кривой – *длина без толщины,* – точки – *объект без длины, ширины и высоты,* вокзала – *место, где все бегают с чемоданами.* Описательные определения такого рода нельзя использовать в логических доказательствах, но они служат полезной иллюстрацией абстрактных понятий и рассуждений.

Пример события: *старт первого космического корабля* (историки космонавтики могут назвать точное место и время). Еще пример несколько иного рода: *то, что происходило в 0 часов по московскому времени 1 января 2001 года в километре над Северным полюсом Земли.* Насколько мы знаем, ничего там примечательного не было, но определенное место и время есть – значит, это можно назвать событием. Последний пример представляет наиболее общую конструкцию событий.

С формальной точки зрения для нас важны следующие факты (по существу, аксиомы). *Во-первых, для любых событий* s_1, s_2 *существует единственное вещественное число* $\Delta t(s_1, s_2)$*, называемое временем (абсолютным временем) между данными событиями. Во-вторых, мы будем считать, что среди всех событий выделено одно –* s_0*, которое называется началом отсчета времени и которое позволяет для любого события* s *определить его момент (абсолютный момент) - число* $t(s) = \Delta t(s_0, s)$. *В-третьих, для любого события* s *и любой твердой среды* Σ *существует единственная точка* $P = P(s, \Sigma) \in \Sigma$ *– место данного события относительно* Σ. *Наконец, в-четвертых, задание определенной точки* P *какой-нибудь твердой среды* Σ *и любого вещественного числа* t *однозначно определяет событие, которое «произошло в точке* P *в абсолютный момент* t*».*

В кинематике светлячков мы будем использовать новые понятия: *событие светлячка, время светлячка, релятивистская система отсчета, местное время релятивистской системы отсчета, относительное расстояние между точками твердой среды* – они обсуждаются ниже.

4.4. Время светлячка.

Событие s назовем *событием светлячка* A, если его место в соответствующий момент совпадает с A. Например, это может быть встреча светлячка A со светлячком B, рождение (или прием) светлячком A отмеченного светового сигнала. Пусть A движется относительно E со скоростью v; s_1, s_2 – два события этого светлячка; Δt – промежуток абсолютного времени между ними. Определим *время* Δt_A *данного светлячка между* s_1 и s_2 как величину, пропорциональную количеству κ тактов между этими событиями:

$$\Delta t_A = \kappa\, \tau_0;$$

Здесь τ_0 – такт неподвижного относительно эфира светлячка, т.е. $\tau_0 = 2\rho / c$

Если светлячок A движется относительно эфира с постоянной скоростью v, то его время связано с абсолютным равенством:

$$\Delta t_A = \Delta t \frac{\tau_0}{\tau_A}.$$

С учетом (4.2) отсюда получается следующая *формула замедления времени светлячка*:

$$\Delta t_A = \Delta t \sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{4.3}$$

В частности, для неподвижного относительно E светлячка $\Delta t_A = \Delta t$.

4.5. Местное время.

Пусть состоящая из светлячков твердая среда Σ' движется относительно эфира E с постоянной скоростью v. Если для светлячка $A \in \Sigma'$ выбрано начало отсчета s_{0A} его времени, то для любого события s этого светлячка можно определить *момент по часам* A формулой

$$t_A(s) = \Delta t_A(s_{0A}, s)\,.$$

Для любого абсолютного момента t через $t_A(t)$ будем обозначать показание часов A в этот момент. Нетрудно видеть, что для $A, B \in \Sigma'$ величина $D(A,B) = t_B(t) - t_A(t)$ – *отставание часов* A *от* B – не зависит от t. Действительно,

$$t_B(t_1)-t_A(t_1)=\left[t_B(t)-t_A(t)\right]+\left[t_B(t_1)-t_B(t)\right]-\left[t_A(t_1)-t_A(t)\right]=$$
$$=t_B(t)-t_A(t)+(t_1-t)\sqrt{1-\beta^2}-(t_1-t)\sqrt{1-\beta^2}=t_B(t)-t_A(t).$$

Определим *местное время* $\Delta t'(s_1,s_2)$ между двумя событиями формулой:

$$\Delta t'(s_1,s_2)=t_B(s_2)-t_A(s_1),$$

где $A,B-$точки (светлячки) среды Σ', в которых, соответственно, произошли события s_1 и s_2. Так определенное местное время зависит от выбора начал отсчета s_{0A} и s_{0B}. Поставим следующую задачу: выбрать начала отсчета времени всех светлячков $A\in\Sigma'$ так, чтобы местное время движения светового сигнала от A к B равнялось местному времени движения от B к A для любых $A,B\in\Sigma'$. Это означает, что должно выполняться равенство

$$t_B(t_1)-t_A(t)=t_A(t_2)-t_B(t), \tag{4.4}$$

где $t-$абсолютный момент выхода светового сигнала из A или B,

$$t_1=t+T(A,B,v),\ t_2=t+T(B,A,v).$$

Преобразуем левую часть (4.4) с использованием (4.3) и (4.1):

$$\begin{aligned}&t_B(t_1)-t_A(t)=\left[t_B(t_1)-t_B(t)\right]+\left[t_B(t)-t_A(t)\right]=\\&=T(A,B,v)\sqrt{1-\beta^2}+D(A,B)=\frac{(v,r_{AB})+\sqrt{(v,r_{AB})^2+r_{AB}^2(c^2-v^2)}}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}+D(A,B).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Аналогично преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned}&t_A(t_2)-t_B(t)=\frac{(v,r_{BA})+\sqrt{(v,r_{BA})^2+r_{BA}^2(c^2-v^2)}}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}+\\&+D(B,A)=\frac{-(v,r_{AB})+\sqrt{(v,r_{AB})^2+r_{AB}^2(c^2-v^2)}}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}-D(A,B).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Теперь из (4.4) получается следующая *формула отставания* часов B от A:

$$D(A,B)=-\frac{(v,r_{AB})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}},\quad \text{т.е.}$$

$$t_B=t_A-\frac{(v,r_{AB})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4.7}$$

Если зафиксировать часы A и с помощью формулы отставания настроить показания всех часов $B \in \Sigma$, то согласованными окажутся и любые часы B, B_1 среды Σ'. Действительно,

$$t_{B_1} = t_A - \frac{(v, r_{AB_1})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = t_A - \frac{(v, r_{AB})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{(v, r_{BB_1})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = t_B - \frac{(v, r_{BB_1})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Это означает, что для B_1 и B тоже выполнено условие согласования (4.7).

Для любого события s мы можем теперь помимо момента абсолютного времени $t(s)$ определить момент *местного времени* среды Σ':

$$t'(s) = t_A(s),$$

где A – точка среды Σ', в которой произошло событие s. Для событий s_1, s_2, происшедших в абсолютные моменты t_1, t_2 в точках B и C среды Σ', *промежуток местного времени* между ними выражается равенствами:

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t_C(s_2) - t_B(s_1) = t_C(t_2) - t_B(t_1) = \left[t_C(t_2) - t_C(t_1)\right] + \left[t_C(t_1) - t_B(t_1)\right] = \\ &= \Delta t\sqrt{1-\beta^2} - \frac{(v, r_{BC})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.6. Относительные расстояния.

Продолжим рассматривать состоящую из светлячков твердую среду Σ' с системой местного времени, для которой справедлива формула отставания (4.7). Для такой среды, движущейся относительно эфира с постоянной скоростью v, будем впредь использовать термин *релятивистская система отсчета.* Завершает построение этой системы определение *относительного расстояния между точками среды* Σ'. С точки зрения светлячков длиной вектора r_{AB}, заданного точками $A, B \in \Sigma'$, естественно считать величину

$$|r_{AB}|' = c\Delta t'(A, B) = c\Delta t'(B, A), \tag{4.9}$$

где $\Delta t'(A, B)$ – местное время движения светового сигнала от A к B.

Разумеется, нужно доказать корректность такого определения, т.е. установить, что эта функция удовлетворяет аксиомам расстояния. Для этого мы предварительно выразим относительное расстояние через абсолютное скалярное произведение. Как следует из (4.5) и (4.6),

$$\Delta t'(A,B) = \frac{1}{2}\left(\Delta t'(A,B) + \Delta t'(B,A)\right) = \frac{\sqrt{(v,r_{AB})^2 + r_{AB}^2(c^2 - v^2)}}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Теперь из (4.9) получается формула для квадрата относительной длины вектора:

$$\left|r_{AB}\right|'^2 = c^2 \Delta t'^2(A,B) = \frac{(v,r_{AB})^2}{c^2 - v^2} + r_{AB}^2. \qquad (4.10)$$

Структура этого выражения наводит на мысль, что для векторов в Σ' существует *относительное скалярное произведение* $(r_{AB}, r_{CD})'$, порождающее данную метрику. Действительно, положим

$$(r_{AB}, r_{CD})' = \frac{(v,r_{AB})(v,r_{CD})}{c^2 - v^2} + (r_{AB}, r_{CD}). \qquad (4.11)$$

Нетрудно видеть, что эта функция удовлетворяет аксиомам скалярного произведения, т.е. она симметрична относительно данных векторов, линейна по каждому из них и порождает положительно определенную квадратичную форму (4.10). Итак, мы доказали корректность определения относительного расстояния и убедились, что оно порождается скалярным произведением (4.11).

Формула (4.10) отражает факт *лоренц-фицджеральдова сокращения всех тел в направлении движения: длина вектора* r_{AB} *в среде* E, *относительно которой он движется, меньше, чем в среде* Σ', *относительно которой он неподвижен. Если вектор* r_{AB} *коллинеарен скорости* v, *то*

$$\left|r_{AB}\right|' = \frac{(v,r_{AB})^2}{c^2 - v^2} + r_{AB}^2 = \frac{v^2 r_{AB}^2 + r_{AB}^2(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2} = \frac{r_{AB}^2}{1-\beta^2},$$

т.е. коэффициент сокращения равен $\sqrt{1-\beta^2}$, *а если ортогонален – то, очевидно,* 1.

4.7. Постоянство скорости света.

Непосредственным следствием формулы (4.9) является то, что в кинематике светлячков справедлив основной тезис специальной теории относительности: *скорость распространения света*

$$\frac{\left|r_{AB}\right|'}{\Delta t'(A,B)}$$

во всех направлениях по отношению к любой релятивистской системе отсчета равна абсолютной константе c.

В классической кинематике такое невозможно: если навстречу поезду светит прожектор, то его свет втекает в глаза высунувшегося из окна пассажира не с той же скоростью, с какой его луч пролетает мимо вокзала, а с большей – к ней прибавляется скорость поезда. Однако в нашем поезде едут светлячки, у каждого из них свои световые часы, и часы первого вагона отстают от часов последнего, и расстояния они измеряют с помощью тех же часов и своих фонариков – и все это так чудесно между собой согласовано, что скорость луча прожектора относительно поезда оказывается точно такой же, как относительно вокзала!

На рубеже девятнадцатого и двадцатого столетий Фицджеральд[3], Лоренц[4], Лармор[5], Пуанкаре[6] и Эйнштейн[7] поняли, что правы не мы, обычные пассажиры, а те, кого мы здесь назвали светлячками, живущие в нас, в наших часах и в наших линейках. Раньше люди этого не замечали по той причине, что участвующая в ре-

---

[3] Фицджеральд Джордж (1851-1901) – ирландский физик, один из создателей теории относительности.

[4] Лоренц Хендрик Антон (1853-1928) – нидер. физик и математик, ин. поч. ч. АН СССР, один из создателей теории относительности, лауреат Нобелевской премии (1902).

[5] Лармор Джозеф (1857-1942) – англ. физик, один из создателей теории относительности.

[6] Пуанкаре Жюль Анри (1854-1972) – франц. математик, физик и философ, ин. ч.-к. Петерб. АН. Основные работы по качеств. теории дифф. уравнений, топологии, небесной механике, мат. физике. Один из создателей теории относительности.

[7] Эйнштейн Альберт (1879-1955, Швейцария, Германия, США) – физик-теор., один из создателей теории относительности, квантовой и статистической физики, лауреат Нобелевской премии (1921), ин. поч. ч. АН СССР.

лятивистских формулах величина β чрезвычайно мала, а при $\beta = 0$ релятивистские формулы превращаются в классические.

4.8. Оператор Лоренца.

Пусть $\overline{v}$ – фиксированный ненулевой вектор трехмерного евклидова пространства V, $e_{\overline{v}} = \overline{v} / |\overline{v}|$. Для любого $\overline{r} \in V$ обозначим через $P_{\overline{v}}\overline{r}$ его ортогональную проекцию на направление $\overline{v}$ и через $Q_{\overline{v}}\overline{r}$ – на дополнительное двумерное подпространство:

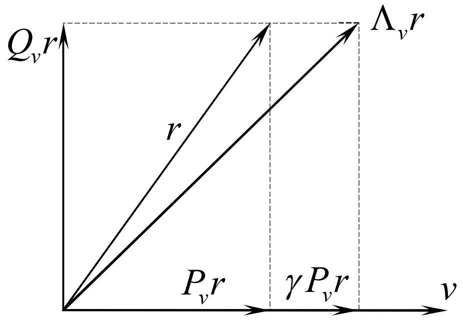

Рис. 17

$$P_{\overline{v}}\overline{r} = (\overline{e}_{\overline{v}}, \overline{r})e_{\overline{v}}, \; Q_{\overline{v}}\overline{r} = \overline{r} - P_{\overline{v}}\overline{r} .$$

Очевидно, что для любых $\overline{r}, \overline{p} \in V$ справедливы соотношения

$$\overline{r} = P_{\overline{v}}\overline{r} + Q_{\overline{v}}\overline{r}, \quad P_{\overline{v}}\overline{r} \| \overline{v}, \quad Q_{\overline{v}}\overline{r} \perp \overline{v}, \quad (\overline{p}, \overline{r}) = (P_{\overline{v}}\overline{p}, P_{\overline{v}}\overline{r}) + (Q_{\overline{v}}\overline{p}, Q_{\overline{v}}\overline{r}).$$

Оператором Лоренца назовем линейное отображение

$$\Lambda_{\overline{v}}\overline{r} = \gamma P_{\overline{v}}\overline{r} + Q_{\overline{v}}\overline{r} = (\gamma - 1)P_{\overline{v}}\overline{r} + \overline{r}, \; \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} .$$

Отметим три свойства этого оператора.

(а) *Если* $\overline{p}, \overline{r} \in V$ *и* $\overline{p}' = \Lambda_{\overline{v}}\overline{p}, \overline{r}' = \Lambda_{\overline{v}}\overline{r}$*, то*

$$(\overline{p}, \overline{r})' = (\overline{p}', \overline{r}'),$$

где $(\overline{p}, \overline{r})'$ – *относительное скалярное произведение в* V – *см.* (4.11).

⊳ Действительно,

$$(\overline{p}', \overline{r}') = (\Lambda_{\overline{v}}\overline{p}, \Lambda_{\overline{v}}\overline{r}) = \gamma^2 (P_{\overline{v}}\overline{p}, P_{\overline{v}}\overline{r}) + (Q_{\overline{v}}\overline{p}, Q_{\overline{v}}\overline{r}) = \gamma^2 (\overline{e}_{\overline{v}}, \overline{p})(\overline{e}_{\overline{v}}, \overline{r}) + (\overline{p}, \overline{r}) - (P_{\overline{v}}\overline{p}, P_{\overline{v}}\overline{r}) =$$
$$= (\overline{p}, \overline{r}) + (\gamma^2 - 1)(\overline{e}_{\overline{v}}, \overline{p})(\overline{e}_{\overline{v}}, \overline{r}).$$

Заметим, что

$$\gamma^2 - 1 = \frac{c^2}{c^2 - \overline{v}^2} - 1 = \frac{\overline{v}^2}{c^2 - \overline{v}^2}.$$

Поэтому

$$(\overline{p}', \overline{r}') = (\overline{p}, \overline{r}) + \frac{\overline{v}^2}{c^2 - \overline{v}^2}(e_{\overline{v}}, \overline{p})(e_{\overline{v}}, \overline{r}) = (\overline{p}, \overline{r}) + \frac{(\overline{v}, \overline{p})(\overline{v}, \overline{r})}{c^2 - \overline{v}^2} = (\overline{p}, \overline{r})'. \; ⊲$$

(б) *Если* $\vec{e}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ *– ортонормированный базис* V *в смысле абсолютного (т.е. первоначально заданного в* V*) скалярного произведения, то* $\overline{e} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ $(\overline{e}_i = \Lambda_{\overline{v}}^{-1}\vec{e}_i')$ *– ортонормированный базис в относительном скалярном произведении.*

$\triangleright$ Это так, поскольку $(\overline{e}_i, \overline{e}_j)' = \left((\Lambda_{\overline{v}}^{-1}\vec{e}_i')', (\Lambda_{\overline{v}}^{-1}\vec{e}_j')'\right) = \left(\Lambda_{\overline{v}}\Lambda_{\overline{v}}^{-1}\vec{e}_i', \Lambda_{\overline{v}}\Lambda_{\overline{v}}^{-1}\vec{e}_j'\right) = (\vec{e}_i', \vec{e}_j')$. $\triangleleft$

(в) *Если* $r, v \in \mathbb{R}^3$ *– векторы координат векторов* $\overline{r}, \overline{v} \in V$ *в базисе* $\vec{e}'$*, то* $r' = \Lambda_v r$ *есть вектор координат вектора* $\overline{r}$ *в базисе* $\overline{e}$.

$\triangleright$ Действительно, координаты вектора по ортонормированному базису можно вычислить как скалярные произведения этого вектора на базисные орты, поэтому

$$r_i' = (\overline{r}, \overline{e}_i)' = (\overline{r}', \vec{e}_i') = (\Lambda_{\overline{v}}\overline{r}, \vec{e}_i') = \left((\gamma-1)(\overline{r}, \overline{v})\frac{\overline{v}}{\overline{v}^2} + \overline{r}, \vec{e}_i'\right) = (\gamma-1)(r, v)\frac{v_i}{v^2} + r_i = \left(\Lambda_v r\right)_i \quad \triangleleft$$

4.9. Преобразование Лоренца.

Пусть $S = (O, \overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3')$ *– декартова система отсчета в* E *и* $S' = (\tilde{O}, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ $(\overline{e}_i = \Lambda_{\overline{v}}^{-1}\overline{e}_i')$ *– соответствующая относительная декартова система отсчета в твердой среде* Σ'*, которая движется в эфире со скоростью* $\overline{v}$ *относительно* S*. Пусть* $r(s), t(s)$ *– вектор абсолютных координат и абсолютный момент события* s*;* $r'(s), t'(s)$ *– относительные координаты и относительный момент этого события,* $\Delta r, \Delta t, \Delta r', \Delta t'$ *– приращения соответствующих характеристик от события* s_1 *к событию* s_2*. Утверждается, что тогда*

$$\begin{aligned} \Delta r' &= \Lambda_v(\Delta r - v\Delta t), & \Delta r &= \Lambda_v(\Delta r' + v\Delta t'), \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - (v, \Delta r)c^{-2}), & \Delta t &= \gamma(\Delta t' + (v, \Delta r)c^{-2}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

$\triangleright$ Рассмотрим еще абсолютную декартову систему $\tilde{S} = (\tilde{O}, \overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3')$, которая движется вместе с Σ'; координаты событий в ней будем отмечать «волной». Тогда, очевидно, $\Delta\tilde{r} = \Delta r - v\Delta t$. Отсюда и из свойства (в) оператора Лоренца вытекает первая из формул (4.12). Вторая формула левой группы следует из (4.8):

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} - \frac{(v,\Delta\tilde{r})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(\Delta t\cdot\gamma^{-2} - (v,\Delta r - v\Delta t)c^{-2}\right) =$$
$$= \gamma\left(\Delta t\left(1-\beta^2\right) - (v,\Delta r)c^{-2} + \Delta t\beta^2\right) = \gamma\left(\Delta t - (v,\Delta r)c^{-2}\right).$$

Для получения первой формулы правой группы сложим почленно первое равенство левой группы со вторым, умноженным на v:

$$\Delta r' + v\Delta t' = \gamma P_v(\Delta r - v\Delta t) + Q_v(\Delta r - v\Delta t) + \gamma v\Delta t - \gamma v(v,\Delta r)c^{-2}.$$

Заметим, что $P_v v = v,\ Q_v v = 0$. Поэтому, далее,

$$\Delta r' + v\Delta t' = \gamma P_v\Delta r - \gamma v\Delta t + Q_v\Delta r + \gamma v\Delta t - \gamma\beta^2 P_v\Delta r = \gamma^{-1}P_v\Delta r + Q_v\Delta r = \Lambda_v^{-1}\Delta r.$$

Применив к обеим частям оператор Лоренца, получаем требуемое равенство.

Наконец, для вывода последней формулы сложим почленно второе равенство левой группы с первым, умноженным на vc^{-2}:

$$\Delta t' + (v,\Delta r')c^{-2} = \gamma\Delta t - \gamma(v,\Delta r)c^{-2} + (v,\Lambda_v\Delta r)c^{-2} - (v,\Lambda_v v)c^{-2}\Delta t.$$

Очевидно,

$$(v,\Lambda_v\Delta r) = (v,\gamma P_v\Delta r + Q_v\Delta r) = \gamma(v,P_v\Delta r) = \gamma(v,\Delta r),\ (v,\Lambda_v v) = \gamma v^2.$$

Следовательно,

$$\Delta t' + (v,\Delta r')c^{-2} = \gamma(1-\beta^2)\Delta t = \gamma^{-1}\Delta t.$$

Отсюда следует доказываемая формула. $\lhd$

Отметим традиционную форму записи преобразования Лоренца. Предположим, что базис $(\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3')$ в эфире выбран так, что орт $\overline{e}_1'$ направлен по $\overline{v}$; пусть при этом в нулевой момент абсолютного времени $\tilde{O} = O$ и $t_{\tilde{O}} = 0$. Тогда абсолютные и относительные координаты $(x,y,z), (x',y',z')$ любого события и его абсолютный и относительный моменты t, t' связаны равенствами:

$$\begin{aligned}
x' &= (x - |v|t)/\sqrt{1-\beta^2}, & x &= (x' + |v|t')/\sqrt{1-\beta^2},\\
y' &= y, & y &= y',\\
z' &= z, & z &= z',\\
t' &= (t - |v|x/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}, & t &= (t' + |v|x'/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$\triangleright$ Действительно, в этом случае событием s_1 будем считать совпадение $\tilde{O}$ с O; тогда для любого другого события s_2 будут справедливы равенства $r = \Delta r,\ t = \Delta t,\ r' = \Delta r',\ t' = \Delta t'$. Кроме того, в рассматриваемом случае

$$\Lambda_v(r - vt) = \begin{pmatrix} \gamma(x - |v|t) \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad (v, r) = |v|x .$$

Поэтому (4.13) совпадает с (4.12). $\triangleleft$

4.10. Теорема о сложении скоростей.

Пусть выполнены условия предыдущего пункта, и пусть отмеченная точка A *движется относительно эфира* E *с постоянной скоростью* u, $|u| < c$. *Будем использовать обозначения:*

$$\gamma_v = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-1} (= \gamma),\ \ \gamma_{uv} = \left(1 - (u, v)c^{-2}\right)^{-1},\ \ \gamma_{u'v} = \left(1 - (u', v)c^{-2}\right)^{-1}.$$

Утверждается, что тогда координаты скорости u' *этой точки относительно* S' *связаны с координатами* u *следующими соотношениями:*

$$u' = \gamma_v^{-1}\gamma_{uv}^2 \Lambda_v(u - v), \qquad u = \gamma_v^{-1}\gamma_{u'v}^2 \Lambda_v(u' + v). \tag{4.14}$$

$\triangleright$ Воспользуемся преобразованием Лоренца (4.12) применительно к событиям: s_1 – выход точки A из некоторого пункта $A_0' \in \Sigma'$, s_2 – прибытие в пункт $A_1' \in \Sigma'$. Тогда

$$u' = \frac{\Delta r'}{\Delta t'} = \frac{\Lambda_v(\Delta r - v\Delta t)}{\gamma_v(\Delta t - (v, \Delta r)c^{-2})} = \frac{\Lambda_v(u\Delta t - v\Delta t)}{\gamma_v(\Delta t - (v, u\Delta t)c^{-2})} = \gamma_v^{-1}\gamma_{uv}^2 \Lambda_v(u - v).$$

Правая формула выводится аналогично из правых формул (4.12). $\triangleleft$

При специальном выборе системы координат в эфире, описанном в конце предыдущего пункта, получается следующая традиционная запись формул сложения скоростей:

$$u'_{x'}=\frac{u_x-|v|}{1-u_x|v|/c^2}, \qquad u_x=\frac{u'_{x'}+|v|}{1+u'_{x'}|v|/c^2},$$
$$u'_{y'}=\frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x|v|/c^2}, \qquad u_y=\frac{u'_{y'}\sqrt{1-\beta^2}}{1+u'_{x'}|v|/c^2}, \qquad (4.15)$$
$$u'_{z'}=\frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x|v|/c^2}, \qquad u_z=\frac{u'_{z'}\sqrt{1-\beta^2}}{1+u'_{x'}|v|/c^2}.$$

Из теоремы о сложении скоростей вытекает следующее соотношение:

$$\gamma_{u'}=\gamma_u\gamma_v\gamma_{uv}^{-2}. \qquad (4.16)$$

▷ Действительно, из формулы сложения скоростей следует:

$$\gamma_{u'}^{-2}=1-\frac{u'^2}{c^2}=1-c^{-2}\gamma_v^{-2}\gamma_{uv}^4\left[\gamma_v^2\left(P_v(u-v)\right)^2+\left(u-P_vu\right)^2\right]=$$
$$=\gamma_v^{-2}\gamma_{uv}^4\left[\gamma_v^2\gamma_{uv}^{-4}-c^{-2}\gamma_v^2\left(u-v,e_v\right)^2-c^{-2}\left(u^2-2(u,P_vu)+(P_vu)^2\right)\right].$$

Поэтому достаточно доказать, что выражение в квадратных скобках равно γ_u^{-2}.

$$\gamma_v^2(1-2c^{-2}(u,v)+v^2(P_vu)^2c^{-4})-c^{-2}\gamma_v^2\left((P_vu)^2-2(u,v)+v^2\right)-c^{-2}\left(u^2-(P_vu)^2\right)=$$
$$=\gamma_v^2-\gamma_v^2c^{-2}(P_vu)^2(1-v^2c^{-2})-c^{-2}\gamma_v^2v^2-c^{-2}\left(u^2-(P_vu)^2\right)=\gamma_v^2-c^{-2}(P_vu)^2-$$
$$-c^{-2}\gamma_v^2v^2-c^{-2}u^2+c^{-2}(P_vu)^2=\gamma_v^2(1-v^2c^{-2})-c^{-2}u^2=1-c^{-2}u^2=\gamma_u^{-2}. \ ◁$$

4.11. Общая формула замедления времени.

Формула замедления (4.3) устанавливает соотношение между абсолютным временем и временем светлячка. Оказывается, что *она остается справедливой и в случае, когда* Δt *заменено на относительное (местное) время движения светлячка* $\Delta t'$, *а скорость* v *светлячка относительно эфира – на его скорость* u' *относительно* Σ':

$$\Delta t_A=\Delta t'\sqrt{1-\beta'^2}, \qquad (4.17)$$

где $\beta'^2=\dfrac{u'^2}{c^2}$.

$\triangleright$ Пусть s_1, s_2 – события светлячка A, t_1, t_2 – соответствующие моменты абсолютного времени, $\Delta t = t_2 - t_1$, u – скорость светлячка A относительно эфира, B и C - точки среды Σ', отмечающие положения светлячка A в моменты t_1, t_2. Будем доказывать (4.17) в виде

$$(\Delta t_A)^2 = (\Delta t')^2 (1 - \beta'^2).$$

С помощью (4.3) и (4.8) выразим $(\Delta t_A)^2$ и $(\Delta t)^2$:

$$\left(\Delta t_A\right)^2 = \left(\Delta t\right)^2 \gamma_u^{-2},\ \left(\Delta t'\right)^2 = \left[\Delta t \gamma_v^{-1} - (v, r_{BC}) c^{-2} \gamma_v\right]^2 = c^{-4} \gamma_v^2 \left[\Delta t c^2 \gamma_v^{-2} - (v, r_{BC})\right]^2.$$

Заметим, что $r_{BC} = r_{B(t_2)C(t_2)} = r_{B(t_1)C(t_2)} - r_{B(t_1)B(t_2)} = r_{A(t_1)A(t_2)} - v\Delta t = u\Delta t - v\Delta t$. Поэтому

$$\left(\Delta t'\right)^2 = \gamma_v^2 \left[\gamma_v^{-2} - (u, v) c^{-2} + v^2 c^{-2}\right]^2 \left(\Delta t\right)^2 = \gamma_v^2 \gamma_{uv}^{-4} \left(\Delta t\right)^2 = \gamma_u^2 \gamma_v^2 \gamma_{uv}^{-4} \left(\Delta t_A\right)^2.$$

Отсюда и из (4.16) получаем:

$$\left(\Delta t_A\right)^2 = \left(\Delta t'\right)^2 \gamma_u^{-2} \gamma_v^{-2} \gamma_{uv}^4 = \left(\Delta t'\right)^2 \gamma_{u'}^{-2}.$$

Тем самым доказано (4.17). $\triangleleft$

4.12. Парадокс близнецов.

«Близнецы» – это светлячки A и B, «живущие» в какой-то точке среды Σ'. Один из них, скажем, B, решает совершить путешествие: со скоростью u' (относительно Σ') улетает от A, а потом со скоростью $-u'$ возвращается. При встрече близнецы сравнивают по своим часам время, прошедшее с момента расставания, и оказывается, что $\Delta t_B = \Delta t_A \sqrt{1 - \beta'^2} < \Delta t_A$ – «путешественник» вернулся более молодым, чем его брат-домосед! Действительно, если событие s_1 – это расставание близнецов, s_2 – поворот B в обратную дорогу, s_3 – встреча, то

$$\Delta t_B = \left[t_B(s_3) - t_B(s_2)\right] + \left[t_B(s_2) - t_B(s_1)\right] = \gamma_{u'}^{-1} \left[t'(s_3) - t'(s_2)\right] + \gamma_{u'}^{-1} \left[t'(s_2) - t'(s_1)\right] =$$
$$= \gamma_{u'}^{-1} \left[t'(s_3) - t'(s_1)\right] = \gamma_{u'}^{-1} \left[t_A(s_3) - t_A(s_1)\right] = \sqrt{1 - \beta'^2}\, \Delta t_A.$$

У домоседа A может, однако, возникнуть недоумение. «Когда брат летел от меня со скоростью u', то это ведь все равно, что я летел от него со скоростью $-u'$. А когда он возвращался ко мне, то можно было считать, что это я двигаюсь к нему. Так почему же он оказался моложе меня, а не наоборот?» Огорчение A можно понять, но рассуждение его ошибочно, как показывает следующая выкладка. Обозначим через Σ'' среду, которая двигалась вместе с B со скоростью u' относительно Σ' на этапе от расставания до поворота и удовлетворяла условию $t''(s_1)=t_A(s_1)$. Далее, пусть Σ''' – среда, которая двигалась вместе с B на этапе от поворота до встречи, причем $t'''(s_2)=t''(s_2)$. Поскольку светлячок B на соответствующих этапах неподвижен относительно Σ'' и Σ''' и $t''(s_1)=t_A(s_1)=t_B(s_1)$, то $t''(s_2)=t_B(s_2)=t'''(s_2)$ и $t'''(s_3)=t_B(s_3)$. Тогда

$$\Delta t_A=\left[t_A(s_3)-t_A(s_1)\right]=\left[t_A(s_3)-t'''(s_3)\right]+\left[t'''(s_3)-t'''(s_2)\right]+\left[t''(s_2)-t''(s_1)\right]=$$
$$=\left[t_A(s_3)-t'''(s_3)\right]+\gamma_{u'}^{-1}\left[t_B(s_3)-t_B(s_2)\right]+\gamma_{u'}^{-1}\left[t_B(s_2)-t_B(s_1)\right]=\left[t_A(s_3)-t'''(s_3)\right]+\gamma_{u'}^{-1}\Delta t_B.$$

Недоумение светлячка A было бы резонно, если бы среда Σ''' совпадала с Σ'. Тогда разность $t_A(s_3)-t'''(s_3)$ была бы равна нулю, и мы действительно пришли бы к противоречию с доказанным выше равенством. Но это не так! Более того, пользуясь двумя полученными формулами, мы можем вычислить отставание t''' от t_A в момент встречи:

$$t_A(s_3)-t'''(s_3)=\Delta t_A-\sqrt{1-\beta'^2}\Delta t_B=\Delta t_A-\left(1-\beta'^2\right)\Delta t_A=\beta'^2\Delta t_A.$$

4.13. Общая формула лоренц-фицджеральдова сокращения.

При выводе формулы лоренц-фицджеральдова сокращения (4.10) рассматриваемые системы отсчета не были равноправны: одна из них была связана с эфиром. Покажем, что эта формула верна и для произвольных релятивистских систем отсчета.

Пусть система Σ'' *движется относительно* Σ' *с постоянной скоростью* u'. *Для любых точек* $A,B\in\Sigma''$ *обозначим через* r'' *координаты в* Σ'' *вектора* $\overline{A(t'')B(t'')}$ *в некоторый момент* t'' *по часам* Σ'' *и через* r' – *координаты вектора*

$\overline{A(t')B(t')}$ в Σ' *в некоторый момент* t' *по часам* Σ'. *Эти векторы, вообще говоря, различны, но от выбора* t'', t' *не зависят. Утверждается, что справедливо равенство:*

$$r''^2 = r'^2 + \frac{(u',r')^2}{c^2 - u'^2}. \tag{4.18}$$

$\triangleright$ В соответствии с определением (4.9),

$$r''^2 = c^2\left[\Delta t''(A,B)\right]^2.$$

Если s_1 – выход светового сигнала из A, s_2 – его отражение от B, s_3 – возвращение в A, то с помощью общей формулы замедления (4.17) получим:

$$\Delta t''(A,B) = \frac{1}{2}\left[\Delta t''(s_1,s_3)\right] = \frac{1}{2}\Delta t_A(s_1,s_3) = \frac{1}{2}\Delta t'(s_1,s_3)\gamma_{u'}^{-1}.$$

Поскольку скорость света в Σ' такая же, как в эфире, время $\Delta t'(s_1,s_3)$ можно вычислить, как в 4.1, 4.2:

$$\Delta t'(s_1,s_3) = \Delta t'(s_1,s_2) + \Delta t'(s_2,s_3) = \frac{(u',r') + \sqrt{(u',r')^2 + r'^2(c^2 - u'^2)}}{c^2 - u'^2} +$$
$$+\frac{-(u',r') + \sqrt{(u',r')^2 + r'^2(c^2 - u'^2)}}{c^2 - u'^2} = \frac{2\sqrt{(u',r')^2 + r'^2(c^2 - u'^2)}}{c^2 - u'^2}.$$

Из трех последних формул следует (4.18). $\triangleleft$

4.14. Общая формула отставания.

Пусть $A,B \in \Sigma''$; t''_B, t''_A – *показания соответствующих часов в момент* t'_1 *системы* Σ'. *Утверждается, что*

$$t''_B = t''_A - \frac{(u',r')}{c^2\sqrt{1-u'^2c^{-2}}}, \tag{4.19}$$

где r' – *координаты в* Σ' *вектора* $\overline{A(t'_1)B(t'_1)}$.

$\triangleright$ Найдем, как в предыдущем пункте, время $\Delta t'(s_1,s_2)$ и $\Delta t'(s_2,s_3)$ движения светового сигнала от A к B и обратно по часам Σ':

$$\Delta t'(s_1,s_2)=\frac{(u',r')+\sqrt{(u',r')^2+r'^2(c^2-u'^2)}}{c^2-u'^2},$$

$$\Delta t'(s_2,s_3)=\frac{-(u',r')+\sqrt{(u',r')^2+r'^2(c^2-u'^2)}}{c^2-u'^2}.$$

По часам этой системы моменты прибытия данного сигнала в B и возвращения в A равны, соответственно, $t_2'=t_1'+\Delta t'(s_1,s_2),\, t_3'=t_2'+\Delta t'(s_2,s_3)$. В системе Σ'' часы согласованы, поэтому

$$t_B''(t_2')-t_A''(t_1')=t_A''(t_3')-t_B''(t_2').$$

Левую и правую части этого равенства преобразуем с помощью общей формулы замедления (4.17):

$$t_B''(t_2')-t_A''(t_1')=t_B''(t_2')-t_B''(t_1')+t_B''(t_1')-t_A''(t_1')=\Delta t'(s_1,s_2)\gamma_{u'}^{-1}+t_B''(t_1')-t_A''(t_1'),$$
$$t_A''(t_3')-t_B''(t_2')=t_A''(t_3')-t_A''(t_2')+t_A''(t_2')-t_B''(t_2')=\Delta t'(s_2,s_3)\gamma_{u'}^{-1}+t_A''(t_1')-t_B''(t_1').$$

В последнем переходе мы воспользовались еще тем фактом, что отставание часов B от A в момент t' системы Σ' не зависит от t'. Из полученных формул следует, что

$$t_B''-t_A''=\frac{1}{2}\big(\Delta t'(s_2,s_3)-\Delta t'(s_1,s_2)\big)\gamma_{u'}^{-1}=-\frac{(u',r')}{c^2\sqrt{1-u'^2c^{-2}}}. \quad \triangleleft$$

4.15. Принцип относительности.

Общие формулы замедления времени, отставания впереди летящих часов и лоренц-фицджеральдовского сокращения движущихся тел означают, что все релятивистские системы отсчета равноправны, эфир ничем не выделяется. Пуанкаре впервые высказал это утверждение в той форме, что природа прибегает к «ухищрениям», чтобы скрыть движение тел относительно эфира. Эйнштейн сделал вывод о том, что эфир вообще не существует (как выделенная система отсчета). С точки зрения кинематики светлячков оба тезиса означают одно и то же

Специальная теория относительности относится к кинематике, однако ее возникновение связано с динамикой. В п. 3.10 мы уже отмечали, что второй закон Ньютона, лежащий в основе классической динамики, справедлив не в любых, а только в инерциальных системах отсчета. Галилей[8] в 1636 году впервые четко высказал убеждение, которое в современных терминах можно сформулировать так: *любая система отсчета, которая движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной, сама является инерциальной* – это утверждение называется *классическим принципом относительности.* Сам Галилей говорил об этом так. «Заставьте … корабль двигаться с любой скоростью и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) … вы… не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно… Бросая какую-нибудь вещь товарищу, вы не должны будете бросать ее с большей силой, когда он будет находиться на носу, а вы на корме, чем когда ваше взаимное положение будет обратным…».

Вера в этот основополагающий принцип подверглась серьезному испытанию в связи с динамикой электромагнитного поля, созданной Максвеллом в шестидесятых годах девятнадцатого столетия. В коэффициенты уравнений Максвелла[9] входит скорость света c, которая по классическим представлениям на движущемся корабле не такая же, как на неподвижном. Означает ли это, что принцип относительности Галилея не сохраняется для электромагнитных явлений?

Замечательные опыты Майкельсона[10] и Морли[11] в восьмидесятых годах девятнадцатого века, впрочем, дали совсем «странный» результат: скорость света все-таки одинакова на движущемся и неподвижном корабле!

Интенсивные попытки нескольких выдающихся физиков и математиков (см. п. 4.7) осмыслить кажущиеся противоречия привели к созданию специальной тео-

---

[8] Галилей Галилео (1564-1642) — итальянский философ, математик, физик, механик и астроном, основатель экспериментальной физики.

[9] Максвелл Джеймс Клерк (1831–1879) – английский физик, создатель классической электродинамики.

[10] Майкельсон Альберт Абрахам (1852-1931) — американский физик, автор “самого знаменитого эксперимента с отрицательным результатом” (1880), лауреат Нобелевской премии (1907).

[11] Морли Эдвард Уильямс (1838-1923) – американский физик и химик, сотрудник Майкельсона в его экспериментах (1885).

рии относительности. Один из ее главных выводов состоит в том, что *вера в равноправие систем отсчета, движущихся относительно некоторой инерциальной равномерно и прямолинейно, восстановлена, только координаты и время в таких системах связаны не классическими преобразованиями Галилея, а преобразованиями Лоренца; это – релятивистский принцип относительности.*

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Айзерман М. А. Классическая механика / М. А. Айзерман.— Изд. 3-е.— М. : Физматлит, 2005.— 378 с.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд.— Изд. 5-е.— М. : Едиториал УРСС , 2003.— 416 с.
3. Бугхольц Н. Н. Основной курс теоретической механики : Учебник для гос ун-тов / Н.Н. Бухгольц; В переработке и с дополнениями С.М. Тарга. Ч.1: Кинематика, статика, динамика материальной точки.— 1967. — 467с.
4. Маркеев А. П. Теоретическая механика : учебник для студ. механ.-мат. спец. ун-тов / А.П. Маркеев.— Изд. 3-е, испр. — М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001.— 591 с.
5. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по техн. специальностям / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина .— Изд. 46-е, стер. — СПб. : Лань, 2006.— 447с.
6. Принцип относительности : Сборник работ по специальной теории относительности / [Сост. А.А. Тяпкин] .— М. : Атомиздат, 1973 .— 331с.
7. Потапов А. С. О релятивистских эффектах в некоторых информационных системах / А.С. Потапов, Б.Н. Садовский // Динамика неоднород-ных систем: Материалы семинара ВНИИ системн.исслед. — М, 1985.— С.166-173.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

8. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : Учебное пособие для студ. втузов / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон; Под ред. Д.Р. Меркина. Т.1: Статика и кинематика.— 1984.— 502с

9. Бражниченко Н. А. Сборник задач по теоретической механике : Учебное пособие для студентов втузов / [Н.А. Бражниченко, В.Л. Кан, Б.Л. Минцберг и др.] ; под ред. Н.А. Бражниченко.— 4-е изд., испр. — М. : Высшая школа, 1986.— 479с.

10. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики : Учебник для студ. втузов / С. М. Тарг.— 12-е изд., стер. — М. : Высшая школа, 2002.— 416 с.

11. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика : Учебное пособие для студ.вузов, обуч. по техн. специаль-ностям / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова.— 9-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2004.— 763с.

Предметный указатель

Вектор, 6
- мгновенной угловой скорости, 18, 23, 28
- угловой скорости, 25

вращение вокруг неподвижной прямой, 24
время
- абсолютное, 38

Динамика, 30
долгота, 13
Естественный параметр, 14
естественный способ задания движения, 13
Закон движения, 10
Кривизна, 15
Лоренц-фицджеральдово сокращение, 42, 50
Мгновенный центр скоростей, 34
множество V^t, 6
Направленный отрезок, 6
Оболочка, 36
отмеченная точка, 5, 36
относительное расстояние, 41
относительное скалярное произведение, 44
Плоско-параллельное движение, 32
поступательное движение, 24, 29
преобразование Лоренца, 45
промежуток местного времени, 41
пространство E^t, 5
Радиус кривизны, 15
Светлячок, 35, 36
система координат, 9
- географическая, 13
- сферическая, 12
- цилиндрическая, 10

система неизменяемая, 8
система отсчета, 9
- декартова, 7
- инерциальная, 32
- относительная декартова, 45
- релятивистская, 41

скорость, 10
- абсолютная, 17
- касательная, 12
- отмеченного вектора, 23
- относительная, 17
- переносная, 18, 28
- радиальная, 12
- света, 43
- тангенциальная, 12
- точек твердой среды, 22
- угловая, 12

сложное движение точки, 16
событие, 37
событие
- светлячка, 38

Такт, 37
твердая среда, 8, 22, 36
твердое тело, 8, 22
теорема
- о сложении скоростей, 47
- о сложении скоростей и ускорений, 18
- Эйлера о скоростях точек твердой среды, 27

траектория, 10
трехмерное аффинное евклидово пространство, 5
Ускорение, 10
- абсолютное, 17
- касательное, 12
- кориолисово, 18, 28, 30
- отмеченного вектора, 23
- относительное, 17
- переносное, 18
- радиальное, 12
- тангенциальное, 12
- точек твердой среды, 22
- угловое, 12
- центростремительное, 12

Формула замедления времени, 39, 48
формула отставания, 39, 51
Широта, 13
Эфир, 36