Пробные экзаменационные вопросы по теоретической механике

1. Кинематика

1.1. Основные понятия

1. Точки A_1 и A_2 имеют в данный момент одинаковые скорости. Можно ли утверждать, что в этот момент их ускорения одинаковы?
2. Ускорение точки A_1 в любой момент промежутка $[t_0, t_1]$ равно удвоенному ускорению точки A_2. Можно ли утверждать, что $v_{A_1}(t_1) = 2v_{A_2}(t_1)$?

$\triangleright$ Нет. Если, например, точки движутся с одинаковыми ненулевыми постоянными скоростями, то $w_{A_1}(t) = 0 = 2w_{A_2}(t)$, но $v_{A_1}(t) = v_{A_2}(t) \neq 2v_{A_2}(t)$. $\triangleleft$

3. Ускорение точки A_1 в любой момент промежутка $[t_0, t_1]$ отлично от нуля и равно удвоенному ускорению точки A_2. Можно ли утверждать, что $v_{A_1}(t_1) = 2v_{A_2}(t_1)$?

$\triangleright$ Нет. Если, например, движение точек задано уравнениями $r_{A_1} = (t + 2t^2)e_x, r_{A_2} = t^2 e_x$, то $w_{A_1}(t) = 4e_x \neq 0; w_{A_2}(t) = 2e_x \Rightarrow w_{A_1}(t) = 2w_{A_2}(t)$. Но $v_{A_1}(t) = (1 + 4t)e_x,\ v_{A_2}(t) = 2te_x;$ поэтому, например, при $t = 1$ $v_{A_1} = 5e_x \neq 2v_{A_2} = 4e_x$. $\triangleleft$

4. Движение точки задано в цилиндрической системе координат, причем $\rho \equiv R$. Означает ли это, что точка движется по сфере радиуса R?
5. Движение точки задано в цилиндрической системе координат. Известно, что проекция скорости на e_ρ тождественно равна нулю. Означает ли это, что проекция ускорения на e_ρ также равна нулю?
6. Корабль движется в северном полушарии вдоль параллели с постоянной скоростью. Если бы он двигался вдоль экватора с такой же скоростью, то его ускорение было бы в два раза меньше. Определить широту местности.
7. Существует ли декартова система отсчета с началом в центре Земли, относительно которой Солнце движется прямолинейно?

1.2. Сложное движение точки

8. Можно ли утверждать, что $w_{пер} = \dot{v}_{пер}$?

$\triangleright$ Нет. Воспользовавшись определениями переносной скорости и переносного ускорения, получим:

$$\dot{v}_{пер} = \frac{d}{dt}(v_{\tilde{O}} + \dot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}A}) = \dot{v}_{\tilde{O}} + \ddot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}A} + \dot{B}\dot{\tilde{r}}_{\tilde{O}A} = w_{пер} + \dot{B}\dot{\tilde{r}}_{\tilde{O}A}.$$

Поэтому если $\dot{B}\dot{\tilde{r}}_{\tilde{O}A} \neq 0$, то $w_{пер} \neq \dot{v}_{пер}$. Это выполняется, например, в случае, когда

$$B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_{\tilde{O}A} = t\tilde{e}_{\tilde{x}} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, в этом случае $\dot{B}\dot{\tilde{r}}_{\tilde{O}A} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$. ⊲

9. Можно ли утверждать, что $w_{отн} = \dot{v}_{отн}$?
10. Если относительные скорости точек A и B одинаковы, то можно ли утверждать, что ускорения Кориолиса этих точек тоже одинаковы?
11. Если кориолисовы ускорения точек A и B одинаковы, то можно ли утверждать, что относительные скорости этих точек тоже одинаковы?
12. Если матрица B перехода от координат векторов в подвижной системе $\tilde{S}$ к координатам векторов в неподвижной системе S постоянна и точка $\tilde{A}$ неподвижна относительно $\tilde{S}$, то можно ли утверждать, что эта точка неподвижна в S?
13. В условиях предыдущего вопроса можно ли утверждать, что скорость любой точки, неподвижной относительно $\tilde{S}$, постоянна относительно S?
14. В условиях предыдущего вопроса можно ли утверждать, что скорости всех точек, неподвижных относительно $\tilde{S}$, одинаковы относительно S?
15. В условиях предыдущего вопроса можно ли утверждать, что ускорение любой точки, неподвижной относительно $\tilde{S}$, относительно S равно нулю?
16. Железнодорожный вагон движется прямолинейно и равномерно. Есть ли на ободе его колеса в данный момент точка, скорость которой не равна нулю и направлена вертикально вверх?
17. Железнодорожный вагон движется прямолинейно и равномерно. Есть ли на ободе его колеса в данный момент точка, скорость которой не равна нулю и направлена вертикально вниз?
18. Если скорости двух точек, неподвижных относительно $\tilde{S}$, в любой момент времени одинаковы относительно S, то можно ли утверждать, что матрица B перехода от координат векторов в подвижной системе $\tilde{S}$ к координатам векторов в неподвижной системе S постоянна?

⊳ Нет. Например, если

$$B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_{\tilde{O}\tilde{A}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_{\tilde{O}\tilde{A}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

то $v_{\tilde{A}_1} = v_{\tilde{O}} + \dot{B}\tilde{r}_{\tilde{O}\tilde{A}_1} = v_{\tilde{O}} = v_{\tilde{A}_2}$, но матрица B не постоянна. ⊲

1.3. Кинематика твердого тела

19. Если скорости всех точек среды $\tilde{\Sigma}$ с декартовой системой отсчета $\tilde{S}$ одинаковы относительно системы отсчета S, то можно ли утверждать, что матрица B из предыдущего вопроса постоянна?
20. Обязательно ли поступательное движение является плоскопараллельным?
21. Обязательно ли плоскопараллельное движение является поступательным?
22. Три точки твёрдой среды имеют в любой момент времени одинаковые скорости. Можно ли утверждать, что движение поступательное?
23. Обязательно ли плоскопараллельное движение является поступательным?
24. Пусть s_1, s_2 – декартовы системы отсчета. Если движение твердой среды Σ относительно s_1 является плоскопараллельным, то можно ли утверждать, что оно будет таким же и относительно s_2?
25. Пусть s_1, s_2 – декартовы системы отсчета. Если движение твердой среды Σ относительно s_1 является поступательным, то можно ли утверждать, что оно будет таким же и относительно s_2?
26. Точки A_1 и A_2 твердой среды имеют в любой момент одинаковые скорости. Можно ли утверждать, что любая точка прямой A_1A_2 имеет ту же скорость?
27. Скорость точки A_1 твердой среды ортогональна прямой A_1A_2. Может ли скорость точки A_2 не быть ортогональной этой прямой?
28. Могут ли скорости точек A_1 и A_2 твердой среды иметь разные углы с $\overline{A_1A_2}$?
29. Могут ли скорости вершин A и B твердого квадрата $ABCD$ равняться, соответственно, $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$?
30. Могут ли скорости двух точек A и B и вектор Ω мгновенной угловой скорости твердого тела удовлетворять условию: $v_A - v_B = \Omega |r_{AB}| \neq 0$?
31. Могут ли скорости двух точек A и B твердого тела удовлетворять условию: $v_A = -2v_B \neq 0$?
32. Если ускорения всех точек твердой среды на данном промежутке времени равны нулю, то можно ли утверждать, что на этом промежутке вектор Ω мгновенной угловой скорости равен нулю?
33. Могут ли скорости вершин A и B твердого равностороннего треугольника ABC равняться, соответственно, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$?
34. Могут ли скорости двух точек твердого тела образовывать с вектором Ω мгновенной угловой скорости разные углы?
35. Могут ли скорости двух точек A и B твердого тела удовлетворять условию: $v_A = 2v_B \neq 0$?
36. Могут ли все точки твердой среды в какой-нибудь момент времени иметь разные скорости?

37. Если вектор Ω мгновенной угловой скорости твердой среды на данном промежутке времени не обращается в ноль, то можно ли утверждать, что ускорения некоторых точек среды не равны тождественно нулю на этом промежутке?
38. Если ускорения всех точек твердой среды на данном промежутке времени равны нулю, то можно ли утверждать, что на этом промежутке среда движется поступательно?
39. Если в твердой среде в момент t имеются две точки с разными скоростями относительно декартовой системы отсчета S, то может ли среда иметь в этот момент нулевую угловую скорость по отношению к S?
40. Если вектор мгновенной угловой скорости твердого тела не зависит от времени, то можно ли утверждать, что тело вращается относительно неподвижной оси?
41. Если при движении твердой среды некоторая принадлежащая ей прямая движется поступательно, то можно ли утверждать, что любая параллельная прямая этой среды также движется поступательно?

2. Динамика

2.1. Основные понятия и законы динамики

42. Можно ли утверждать, что любые две инерциальные системы отсчета движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно?

▷ Да. Инерциальные системы отсчета характеризуются тем, что в них выполняется второй закон Ньютона. Система $\tilde{S}$ движется относительно S равномерно и прямолинейно в том и только том случае, когда скорости всех точек, неподвижных относительно $\tilde{S}$, постоянны, т.е. их ускорения относительно S в любой момент времени равны нулю. Если предположить, что движение $\tilde{S}$ относительно S не является равномерным и прямолинейным, то найдется неподвижная относительно $\tilde{S}$ точка $\tilde{A}$, ускорение которой w в какой-то момент t_1 отлично от нуля. Если в этой точке помещена ненулевая масса m, то по второму закону Ньютона на нее в этот момент действует сила $F = mw \neq 0$. Но относительно инерциальной системы $\tilde{S}$ точка $\tilde{A}$ неподвижна, поэтому ее ускорение $\tilde{w}$ в этой системе равно нулю, так что $\tilde{F} = m\tilde{w} = 0$. Это означает, что $F = B\tilde{F} = 0$ ($B-$ матрица перехода от координат в системе $\tilde{S}$ к координатам в S). Полученное противоречие доказывает, что движение $\tilde{S}$ относительно S равномерно и прямолинейно.◁

43. Металлические шарики A_1 и A_2 падают на землю с одинаковой высоты: A_1 без начальной скорости, а A_2 с ненулевой горизонтальной скоростью. Какой из них долетит до земли быстрее?

44. Металлические шарики один за другим падают на землю с одинаковой высоты: первый без начальной скорости, а второй с некоторой скоростью, направленной вертикально вверх. Может ли второй шарик догнать первый?
45. Два тяжелых шарика одновременно бросают вертикально вверх. Первый возвращается на землю быстрее, чем второй. Можно ли утверждать, что его начальная скорость была меньше?
46. Металлические шарики один за другим падают на землю с одинаковой высоты: первый без начальной скорости, а второй с некоторой скоростью, направленной вертикально вниз. Может ли второй шарик догнать первый на середине пути, но не перегнать его?

▷ Нет. Уравнение движения шарика имеет вид: $\ddot{z} = -g\ (x = y = 0)$. Для первого шарика выполнены начальные условия: $z_1(0) = z_0,\ \dot{z}_1(0) = 0$; для второго: $z_2(t_0) = z_0,\ \dot{z}_2(t_0) = -v < 0,\ t_0 \geq 0$. Поэтому

$$\dot{z}_1(t) = -gt, \quad \dot{z}_2(t) = -g(t - t_0) - v = \dot{z}_1(t) + gt_0 - v,$$

т.е. разность скоростей шариков есть постоянная величина $gt_0 - v$. Эта величина строго положительна, так как второй шарик догнал первый. Поэтому сразу после того, как шарики поравняются, второй перегонит первый. ◁

47. Космонавт, стоящий на поверхности Луны, уронил тяжелый гаечный ключ, легкую гайку и пушинку привезенного с земли одуванчика. Правда ли, что все три предмета упадут на лунную поверхность одновременно?
48. Металлические шарики, брошенные вертикально вверх, поднялись на одинаковую максимальную высоту. Можно ли утверждать, что на половине максимальной высоты их скорости были одинаковы?
49. Как изменится период колебаний гармонического осциллятора, если масса грузика увеличится в 4 раза?
50. Как изменится период колебаний маятника, если его масса увеличится вдвое?
51. При вертикальных запусках снарядов на большое расстояние как изменится максимальное удаление от Земли при удвоении массы снаряда и сохранении начальной скорости?
52. Как изменится период колебаний гармонического осциллятора, если коэффициент жесткости пружины уменьшить в 4 раза?
53. На систему из двух свободных материальных точек A, B не действуют внешние силы. Можно ли утверждать, что в любой инерциальной системе отсчета ускорения этих точек связаны соотношением $w_A = -\mu w_B$, где μ – положительная константа, не зависящая от выбора системы отсчета?

2.2. Метод фазовой плоскости

54. Если грузик маятника разделить на две равные части и одну из них при-

крепить в середине стержня (а вторую оставить в конце), то как изменится период колебаний?

2.3. Движение в центр. поле и законы Кеплера

55. Если максимальное удаление спутника от центрального тела в 10 раз больше минимального, то каково отношение его максимальной угловой скорости к минимальной?

56. При движении материальной точки в центральном поле её максимальная угловая скорость в 100 раз больше минимальной. Как соотносятся максимальное и минимальное удаления точки от центра поля?

57. Любой ли эллипс с фокусом в центре гравитационного притяжения может быть орбитой спутника?

⊳ Да. Движение спутника однозначно определяется тремя начальными значениями ρ_0 – расстояние до центра притяжения, v_0 – величина начальной скорости, α_0 – угол между радиус-вектором спутника и вектором скорости в начальный момент. Начальные условия для движения спутника по эллиптической орбите с параметром p и эксцентриситетом $e<1$ можно найти следующим образом. Во-первых, воспользуемся формулами для величины кинетического момента и параметра орбиты:

$$M = m\rho_0 v_0 \sin\alpha_0,\ \ p = \frac{M^2}{mG\bar{m}m} = \frac{\rho_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{G\bar{m}}.$$

Положив $\alpha_0 = \pi/2$, получим:

$$v_0^2 = \frac{G\bar{m}p}{\rho_0^2}. \qquad (1)$$

Далее, по формулам для полной энергии и эксцентриситета:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{G\bar{m}m}{\rho_0},\ e^2 = 1 + \frac{2Ep}{G\bar{m}m} = 1 + \frac{v_0^2 p}{G\bar{m}} - \frac{2p}{\rho_0} = 1 + \frac{p^2}{\rho_0^2} - \frac{2p}{\rho_0} = \left(\frac{p}{\rho_0} - 1\right)^2.$$

Следовательно, $\rho_0 = \dfrac{p}{1 \pm e}$. Для любого из этих (положительных) значений найдем соответствующее значение v_0 по (1).⊲

58. Два спутника одного центрального тела имеют одинаковые периоды обращения. Могут ли они иметь орбиты разной формы?

⊳ Да. Из третьего закона Кеплера следует, что периоды обращения одинаковы тогда и только тогда, когда одинаковы большие полуоси орбит. Но при этом малые полуоси могут быть разные (см. ответ на предыдущий вопрос). Следовательно, орбиты могут иметь разную форму.⊲

59. Два спутника одного центрального тела имеют одинаковые периоды обращения, но разные орбиты. Могут ли их орбиты быть вложены одна в другую?
60. Два спутника одного центрального тела имеют одинаковые периоды обращения, но разные по форме орбиты. Могут ли площади их орбит быть одинаковыми?
61. Спутник имеет круговую орбиту с известным радиусом и периодом обращения. Какую начальную скорость нужно придать второму спутнику, чтобы он двигался по круговой орбите удвоенного радиуса?
62. Спутник движется в поле притяжения центрального тела с постоянной по величине скоростью. Можно ли утверждать, что его орбита – окружность?
63. Барон Мюнхгаузен обнаружил около звезды S планету P и заметил, что законы движения Земли вокруг Солнца и P вокруг S в подходящих инерциальных системах отсчета имеют вид $r(t) = f(t)$ и $r(t) = f(t)/2$ с одной и той же функцией $f(t)$. Прав ли был барон, когда сделал из этого вывод, что масса звезды S в 8 раз больше массы Солнца?
64. Если наибольшая угловая скорость спутника в 4 раза больше наименьшей, то чему равен эксцентриситет орбиты?
65. Если наименьшее расстояние спутника до центрального тела вдвое меньше наибольшего, то чему равен эксцентриситет орбиты?
66. Если эксцентриситет орбиты спутника равен 1/3, то во сколько раз его наименьшая угловая скорость меньше наибольшей?
67. Если эксцентриситет орбиты спутника равен 1/3, то во сколько раз наибольшее расстояние до центрального тела больше наименьшего?
68. Материальная точка под действием центральной силы движется по круговой орбите. Можно ли утверждать, что ее скорость по величине постоянна?
69. Если материальная точка движется в центральном поле с постоянной угловой скоростью, то можно ли утверждать, что она движется по окружности?
70. Может ли материальная точка под действием центральной силы $F = f(|r|)r$ ($f(\rho) \neq 0$ *при* $\rho \neq 0$) двигаться в плоскости, не содержащей центр поля?

▹ Нет. Пусть начало O инерциальной декартовой системы отсчета S лежит в центре данного силового поля. Если траектория $\{r(t) : t \in [t_0, t_1]\}$ в течение некоторого промежутка времени лежит в плоскости, ортогональной постоянному вектору $n \in \mathbb{R}^3$, то векторы $r(t+\Delta t) - r(t)$ также ортогональны n. Следовательно, и векторы скорости $v(t)$ ортогональны вектору n: $(v(t), n) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\dfrac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}, n\right) = 0$. Поэтому векторы ускорения $w(t) = \dot{v}(t)$ тоже ортогональны n. По второму закону Ньютона, $F = mw$, так что $(F, n) = 0$.

2.4. Теорема об изменении импульса системы

71. Если импульс механической системы сохраняет постоянное значение, то означает ли это, что на точки этой системы не действуют внешние силы?
72. Если центр масс системы материальных точек движется относительно инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно, то можно ли утверждать, что на точки этой системы не действуют внешние силы?
73. Если при движении в центральном поле две материальные точки с равными массами постоянно занимают симметричные относительно центра поля позиции, то можно ли утверждать, что импульс системы из этих двух точек не меняется во времени? (Центр поля неподвижен относительно инерциальной системы отсчета).
74. Правда ли, что физкультурник, выполняющий приседания, на счёт «раз» давит на землю слабее, чем на счет «два»?
75. Не нарушил ли кот Бегемот закон изменения импульса, запрыгнув с пола на люстру?
76. По тележке, свободно стоящей на гладких рельсах, человек прошел сначала из одного конца в другой, а потом обратно. Как при этом изменилось положение тележки на рельсах?
77. Вдоль по тележке, свободно стоящей на гладких рельсах, прошел несколько раз человек в разных направлениях, после чего передний конец тележки вернулся в свое первоначальное положение. Можно ли утверждать, что и человек вернулся в исходную точку на тележке?
78. Если на точки системы действуют только силы, коллинеарные фиксированной прямой l, и в начальный момент все точки системы имеют нулевую скорость, то правда ли, что расстояние от центра масс системы до l постоянно?
79. Однажды барон Мюнхгаузен чуть не утонул в болоте, но в последний момент ему удалось одной рукой сильно дернуть себя за волосы вверх – и спасся. Можно ли этому поверить?

2.5. Теорема об изменении кинетического момента

80. Если кинетический момент материальной точки A относительно O сохраняет постоянное значение, то означает ли это, что на точку действует только центральная сила с центром в O?
81. Если кинетический момент материальной точки A относительно O сохраняет постоянное значение, то означает ли это, что на точку действует только сила, коллинеарная OA?
82. Два цилиндрических однородных маховика одинаковой массы раскручиваются вокруг своих осей симметрии с помощью сил, имеющих постоянные моменты M и $4M$ относительно этих осей, но угловые скорости маховиков оказываются одинаковыми. Чем отличаются эти маховики?

83. Два цилиндрических однородных маховика одинаковой массы раскручиваются вокруг своих осей симметрии с помощью сил, имеющих одинаковые моменты относительно этих осей, но угловая скорость первого маховика оказывается в 4 раза больше угловой скорости второго. Чем отличаются эти маховики?
84. Платформа Жуковского вращается с постоянной угловой скоростью. Находящийся на ней человек движется от точки на краю к центру строго по радиусу. Как при этом меняется угловая скорость платформы?
85. Если на материальную точку действует сила, которая в инерциальной декартовой системе отсчета выражается формулой $F = r\dot{r}^2$, то можно ли утверждать, что кинетический момент точки сохраняет постоянное значение?
86. На материальную точку действует сила F, которая в инерциальной декартовой системе отсчета S выражается формулой $F = r \cdot (\sin t + \dot{r}^2)$. Можно ли утверждать, что кинетический момент этой точки сохраняет постоянное значение?
87. Может ли человек так пройти по платформе Жуковского из точки на ее краю в диаметрально противоположную точку, чтобы положение платформы осталось неизменным?

2.6. Теорема об изменении кинетической энергии

88. Если кинетическая энергия системы материальных точек остается неизменной, то верно ли, что все ее точки движутся равномерно и прямолинейно?
89. Из всех осей, проходящих через центр однородной круглой пластинки, указать те, относительно которых момент инерции имеет максимальное и минимальное значение.
90. Можно ли утверждать, что линейная комбинация потенциальных силовых полей является потенциальным полем?
91. При движении материальной точки в консервативном силовом поле может ли ее потенциальная энергия возрастать до бесконечности?
92. При движении материальной точки в консервативном силовом поле может ли ее потенциальная энергия убывать до $-\infty$?
93. Если материальная точка начинает движение в консервативном силовом поле с нулевой начальной скоростью, то может ли ее потенциальная энергия быть строго возрастающей функцией времени?
94. Консервативное силовое поле всюду в некоторой области имеет ненулевой градиент. Можно ли утверждать, что материальная точка в этой области не может оставаться неподвижной?

2.7. Уравнения Лагранжа

95. Бусинка движется по гладкой проволоке, имеющей форму окружности с центром в неподвижной точке инерциальной системы отсчета, под действием центральной силы с центром в той же точке. Можно ли утверждать, что угловая скорость бусинки постоянна?
96. Бусинка движется по гладкой прямолинейной проволоке под действием силы тяжести. Можно ли утверждать, что ее ускорение постоянно?
97. Бусинка единичной массы движется по гладкой проволоке, имеющей форму $x^2+y^2=1,\ z=1,$ под действием силы $F=r-e_y$; $r=r(t)$ – радиус-вектор бусинки; $e_y=(0,1,0)$. Найти уравнение движения, устойчивое положение равновесия и период колебаний около него амплитуды φ_0.

▷ Обобщенная координата: φ - угол из цилиндрической системы координат. Радиус-вектор и кинетическая энергия бусинки:

$$r=e_\rho+e_z,\ \dot{r}=\dot{\varphi}e_\varphi,\ T=\frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}T=\dot{\varphi};\ \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}T=\ddot{\varphi};\ \frac{\partial}{\partial\varphi}T=0.$$

Обобщенная сила:

$$Q=\left(F,\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)=\left(e_\rho+e_z-e_y,e_\varphi\right)=-\left(e_y,e_\varphi\right)=-\cos\varphi.$$

Уравнение движения:

$$\ddot{\varphi}=-\cos\varphi.$$

Положения равновесия находятся из уравнения $-\cos\varphi=0$: $\bar{\varphi}=-\frac{\pi}{2},\ \hat{\varphi}=\frac{\pi}{2}$.

Вариант 1.

Потенциальная энергия:

$$U(\varphi)=\sin\varphi\quad\left(\textit{проверка}:\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi=-(-\cos\varphi)-\textit{соотв.определению}\right).$$

Устойчивое положение равновесия – точка локального минимума потенциальной энергии:

$$\sin\varphi\to\min\ \Rightarrow\varphi=\bar{\varphi}=-\frac{\pi}{2}.$$

Период колебаний около $\bar{\varphi}$ амплитуды φ_0 (Динамика 1, (17)):

$$T=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}-\varphi_0}^{-\frac{\pi}{2}+\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{E-\sin\varphi}}=\left\langle E=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi_0\right)=-\cos\varphi_0\right\rangle=$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}-\varphi_0}^{-\frac{\pi}{2}+\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{-\cos\varphi_0-\sin\varphi}}.\qquad\triangleleft$$

Вариант 2: заменой переменной $\varphi=\psi-\frac{\pi}{2}$ свести уравнение движения к уравнению маятника и воспользоваться результатами (2.6, Динамика 1).

98. Бусинка единичной массы движется по гладкой проволоке, имеющей форму $x^2+y^2=1,\ z=1,$ под действием силы $F=r-e_y-e_x$; $r=r(t)$ – радиус-вектор бусинки; $e_x=(1,0,0),\ e_y=(0,1,0)$. Найти уравнение движения, устойчивое положение равновесия и период колебаний около него амплитуды φ_0.

99. Бусинка единичной массы движется по гладкой проволоке, имеющей форму $x^2+y^2=1,\ z=1,$ под действием силы $F=-r+e_y+e_x$; $r=r(t)$ – радиус-вектор бусинки; $e_x=(1,0,0),\ e_y=(0,1,0)$. Найти уравнение движения, устойчивое положение равновесия и период колебаний около него амплитуды φ_0.

100. Бусинка единичной массы движется по гладкой проволоке, имеющей форму $x^2+y^2=1,\ z=1,$ под действием силы $F=-r-e_y+e_x$; $r=r(t)$ – радиус-вектор бусинки; $e_x=(1,0,0),\ e_y=(0,1,0)$. Найти уравнение движения, устойчивое положение равновесия и период колебаний около него амплитуды φ_0.

101. Бусинка единичной массы движется по гладкой проволоке, имеющей форму $x^2+y^2=1,\ z=1,$ под действием силы $F=r+e_y-e_x$; $r=r(t)$ – радиус-вектор бусинки; $e_x=(1,0,0),\ e_y=(0,1,0)$. Найти уравнение движения, устойчивое положение равновесия и период колебаний около него амплитуды φ_0.

2.8. Метод малого параметра

102. Если грузик маятника разделить на две равные части и одну из них прикрепить в середине стержня (а вторую оставить в конце), то как изменится период малых колебаний?

103. Для системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} = (x-1)(x+1)$$

найти положения равновесия, их малые возмущения и (если возможно) период малых колебаний.

▹ Положения равновесия:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1.$$

Уравнение малых возмущений положения x_k (см. Динамика 2, **2.8.1, 2.8.2**):

$$\ddot{\xi}_k = \frac{d}{dx}\left[(x-1)(x+1)\right]_{x=x_k} \cdot \xi_k = \left[1\cdot(x_k+1)+(x_k-1)\cdot 1\right]\xi_k = 2x_k\xi_k .$$

При $k=1$:

$$\ddot{\xi}_1 = 2\xi_1.$$

Общее решение: $\xi_1 = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}$ - общий вид малых отклонений от x_1.

При $k=2$:

$$\ddot{\xi}_2 = -2\xi_2 .$$

Общее решение: $\xi_2 = C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\sin\sqrt{2}t$. Период малых колебаний: $2\pi/\sqrt{2}$.

2.9. Относительное движение

104. Груз единичной массы свободно движется вдоль гладкого стержня под действием силы двух встречных пружин. Найти уравнение движения при условии, что стержень расположен в вагоне прямолинейно движущегося со скоростью $V = V(t)$ поезда по направлению движения поезда. На участке движения поезда с постоянным ускорением w_0 найти положение равновесия груза.

105. Груз единичной массы свободно движется вдоль гладкого стержня под действием силы тяжести и двух встречных пружин. Найти уравнение движения при условии, что стержень расположен вертикально в лифте,

движущемся со скоростью $V = V(t)$. На участке подъема лифта с постоянным ускорением w_0 найти положение равновесия груза.

⊳ Пусть начало координат неподвижно относительно лифта и находится в точке равновесия груза на стержне при неподвижном лифте; ось Ox направлена вертикально вверх. Тогда (см. уравнение относительного движения, Динамика 2, **2.9.3**)

$$\ddot{x} = -cx + J_{пер} + J_{кор}$$

«Неподвижной» считаем систему координат с началом в центре Земли и теми же направлениями осей, для данной задачи она «достаточно инерциальна». Тогда $J_{кор} = -w_{кор} = -2[\Omega, v_{отн}] = 0,$ поскольку подвижная система координат не вращается относительно неподвижной. Далее,

$$J_{пер} = -\dot{V}(t).$$

Поэтому

$$\ddot{x} = -cx - \dot{V}(t).$$

При подъеме лифта с постоянным ускорением $w_0 = \dot{V}$ положение равновесия груза определяется равенством $-cx - w_0$, т.е. $x = -w_0 / c$ (располагается ниже начала координат). ⊲