ГЛАВА 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ

В этой главе показывается, как с помощью специальной замены переменных систему с диодной нелинейностью можно свести к задаче об упоре [I0] и дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом. Отсюда получается глобальная теорема существования и единственности решения задачи Коши. Далее с использованием теории монотонных операторов [24], [29] при некоторых ограничениях доказываются теоремы о конвергентности, устойчивости, оценках решений, существовании и единственности периодического решения. В первом параграфе главы результаты об операторах люфта и упора из [I0] приспосабливаются к рассматриваемым здесь условиям.

§ 2.I. Задачи о люфте и упоре

2.I.I. Определение операторов люфта и упора. Пусть $\mathcal{K}$ - выпуклое замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Если $v(t)$ - вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^n$, то сумму $v(t)+\mathcal{K}$ можно интерпретировать как поступательное движение $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что движение происходит под действием точки $j = j(t) \in \mathbb{R}^n$, которая постоянно находится в теле $v(t) \in \mathcal{K}$,

$$j \in v+\mathcal{K}, \tag{I}$$

и "толкает" его, если упирается в его (гладкие) стенки. Последнее в более точной формулировке означает, что скорость изменения

PDF-XChange Click to buy NOW! www.tracker-software.com

v есть проекция вектора $\frac{dj}{dt}$ на клин внешних нормалей $N(v(t)+\mathcal{K}, j)$ к телу $v(t)+\mathcal{K}$ в точке j :

$$\frac{dv}{dt} = P[N(v(t)+\mathcal{K}, j)]\frac{dj}{dt} . \qquad (2)$$

Задача о люфте с зазором $\mathcal{K}$ состоит в отыскании абсолютно непрерывной функции v, удовлетворяющей начальному условию

$$v(t_0) = v_0 \qquad (3)$$

и почти всюду дифференциальному уравнению (2). Функция $j(t)$ в этой постановке считается кусочно непрерывно дифференцируемой.

Задача (2), (3) при условии

$$j(t_0) \in v_0 + \mathcal{K} \qquad (4)$$

имеет единственное решение ([10] , с. 111, теор. 16.1 и равенство (16.25)), и поэтому корректно определен на множестве кусочно гладких функций оператор люфта.

$$v(t) = L[t_0, v_0; \mathcal{K}]\, j(t). \qquad (5)$$

Если функцию $j(t)$ интерпретировать как "ветер", под действием которого в неподвижном множестве $\mathcal{K}$ движется точка $i(t)$, то мы получаем задачу об упоре с зазором $\mathcal{K}$. Формально она записывается в виде соотношений

$$\frac{di}{dt} = P[N^*(\mathcal{K}, i)]\frac{dj}{dt} , \qquad (6)$$

$$i(t_0) = i_0 \in \mathcal{K}. \qquad (7)$$

На множество всех кусочно гладких функций $j(t)$ она корректно определяет ([10], с. 111, теор. 16.1) оператор упора:

$$i(t) = \mathcal{V}[t_0, i_0; \mathcal{K}]\, j(t). \qquad (8)$$

Решения задач о люфте и об упоре связаны соотношением ([10], с. 111, (16.25)):

$$\Delta v + \Delta i = \Delta j, \qquad (9)$$

где Δv, Δi, Δj - приращения соответствующих функций за любой промежуток времени.

2.1.2. Теорема об операторах люфта и упора ([10], с.124). Пусть $\mathcal{K}$ - ограниченный многогранник. Тогда операторы люфта и упора удовлетворяют условию Липшица как отображения из подмножества пространства C в C. Это означает в частности, что они допускают продолжение с сохранением условия Липшица и констант Липшица на множество всех непрерывных входов. Существуют константы Липшица, которые полностью определяются набором внешних нормалей к граням $\mathcal{K}$ высшей размерности.

В следующем пункте мы распространим эту теорему на случай, когда $\mathcal{K}$ есть граненый клин, т.е. откажется от условия ограниченности $\mathcal{K}$ в предыдущей теореме. Отметим, что в доказательстве теоремы в [10] условие ограниченности $\mathcal{K}$ не используется и присутствует лишь постольку, поскольку операторы люфта и упора определены для ограниченных множеств. В определениях же операторов люфта и упора ограниченность $\mathcal{K}$, по-видимому, не является существенным условием их корректности, как показывает следующее следствие.

2.1.3. Следствие для граненого клина. Если $\mathcal{K}$ - граненый клин, то операторы люфта и упора корректно определены и справедливы утверждения теоремы 2.1.2.

Доказательство. Пусть j, $\tilde{j}$ - заданные на полуоси

$[t_0, \infty)$ гладкие входы, $i_0 \in \mathcal{K}$ - начальное значение. Обозначим через $\mathcal{K}_t$ для $t > t_0$ пересечение клина $\mathcal{K}$ с кубом $[-M_t, M_t]^n$, где число M_t выбрано настолько большим, что решения i_t, $\tilde{i}_t$ задачи об упоре с характеристикой $\mathcal{K}_t$ на промежутке $[t_0, t]$ остаются строго внутри куба. Такой выбор M_t возможен ввиду ограниченности $\frac{dj}{dt}$, $\frac{d\tilde{j}}{dt}$ на $[t_0, t]$ и благодаря неравенствам $|di/dt| \leq |dj/dt|$, $|d\tilde{i}/dt| \leq |d\tilde{j}/dt|$. Для $t_2 > t_1$ $i_{t_2}(t) = i_{t_1}(t)$, $\tilde{i}_{t_2}(t) = \tilde{i}_{t_1}(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$ в силу единственности решения задачи об упоре. Теперь очевидно, что

$$V[t_0, i_0; \mathcal{K}]j(t) = V[t_0, i_0; \mathcal{K}_t]j(t),$$

$$V[t_0, i_0; \mathcal{K}]\tilde{j}(t) = V[t_0, i_0; \mathcal{K}_t]\tilde{j}(t),$$

и можно воспользоваться теоремой 2.I.2.

§ 2.2. Сведение системы с диодной нелинейностью к задаче об упоре и уравнению с запаздывающим аргументом

2.2.I. Замена переменных. Вернемся к рассмотрению системы с диодной нелинейностью:

$$\frac{dX}{dt} + \mathcal{R}X + V = e(t), \tag{I}$$

$$X \in K, \tag{2}$$

$$V \in K^*, \tag{3}$$

$$\langle X, V \rangle = 0. \tag{4}$$

PDF-XChange
Click to buy NOW!
www.tracker-software.com

Осуществим замену переменных X, U на новые переменные j, i, связанные с X, U следующими соотношениями:

$$U = j' - i', \quad X = i, \quad j(t_0) = 0. \tag{5}$$

С новыми переменными система принимает вид:

$$j' + Ri = e(t), \tag{6}$$

$$j' - i' \in K^*, \tag{7}$$

$$i \in K, \tag{8}$$

$$\langle i, j' - i' \rangle = 0. \tag{9}$$

Полученная система с учетом замены переменных (5) полностью эквивалентна системе (I)-(4).

2.2.2. <u>Эквивалентность задаче об упоре</u>. Покажем, что подсистема (7) - (9) равносильна уравнению упора (6) из § 2.I.

Действительно, пусть i таково, что выполнены условия (7) - (9). Тогда, во-первых, $j' - i' \in N(K, i)$, так как для произвольного $z \in K$ $\langle z - i, j' - i' \rangle = \langle z, j' - i' \rangle - \langle i, j' - i' \rangle \leq 0$ (первое слагаемое неположительно в силу (7), а второе равно нулю ввиду (9)). Во-вторых, $\langle i', y \rangle = 0$ для любого $y \in N(K, i)$, потому что, с одной стороны, $\lim\limits_{\Delta t \to +0} \langle (i(t + \Delta t) - i)/\Delta t, y \rangle \leq 0$, а с другой $\lim\limits_{\Delta t \to +0} \langle (i(t - \Delta t) - i)/(-\Delta t), y \rangle \geq 0$. Из этого следует, что $i' \in N^*(K, i)$, и $\langle i', j' - i' \rangle = 0$. Тогда по теореме о разложении на ортогональные проекции имеем $i' = P[N^*(K, i)] j'(t)$.

Допустим теперь, что i есть решение уравнения упора. Из вышеупомянутой теоремы следует, что тогда $j'-i' = P[N(K,i)]j' \in N(K,i)$. Но $N(K,i) \subset K^*$, так как вместе с i K содержит множество $i+K$, и поэтому для произвольных $y \in N(K,i)$, $z \in K$ имеем: $\langle z,y\rangle = \langle (z+i) - i, y\rangle \leq 0$. Следовательно, $j'-i' \in K^*$. Нетрудно также видеть, что клин $N(K,i)$ ортогонален i, из чего, в частности, следует (9). Действительно, с одной стороны, $-\langle i,y\rangle = \langle 0-i,y\rangle \leq 0$ для $y \in N(K,i)$, с другой $\langle i,y\rangle = \langle 2i-i,y\rangle \leq 0$ $(0 \in K,\ 2i \in K)$.

2.2.3. Уравнение с запаздывающим аргументом. Отметим одну важную для нас особенность оператора упора: значение выходной функции i в любой момент t зависит, очевидно, только от сужения j_t входной функции на отрезок $[t_0, t]$. Подчеркивая эту особенность, задачу об упоре будем записывать в следующей форме:

$$i(t) = U[t_0, i_0; K]\, j_t . \tag{10}$$

Теперь систему (6) - (9) перепишем в виде:

$$j'(t) + \mathcal{R}U[t_0, X_0; K]\, j_t = e(t), \tag{11}$$

$$i(t) = U[t_0, X_0; K]\, j_t ; \tag{12}$$

здесь X_0 есть обозначение для $i(t_0)$. Система (11), (12) с учетом замены переменных (5), как мы уже показали, эквивалентна исходной системе дифференциальных уравнений с диодной нелинейностью (1) - (4).

Векторное уравнение (11) представляет собой функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа с оператором $U[t_0, X_0; K]$, удовлетворяющим условию Липшица. Теория таких уравнений позволяет утверждать, что задача Коши

$$j'(t) + \partial V[t_0, X_0; K] j_t = e(t), \qquad (13)$$

$$j(t_0) = 0 \qquad (14)$$

однозначно разрешима на всей полуоси $[t_0, +\infty)$ (см. [9], с. 26) для непрерывной функции $e(t)$ и её решение j непрерывно дифференцируемо.

2.2.4. Теорема существования и единственности для системы с диодной нелинейностью. Если функция $e(t)$ непрерывна на $[t_0, +\infty)$, то система (I) - (4) для любого $X_0 \in K$ имеет на $[t_0, +\infty)$ единственное решение (X, U), удовлетворяющее начальному условию

$$X(t_0) = X_0 \qquad (15)$$

Доказательство по существу уже проведено. Система (I)-(4), (I5) эквивалентна распавшейся системе, состоящей из задачи Коши (I3) - (I4) и явной формулы для i (I2); задача (I3) - (I4) имеет на $[t_0, +\infty)$ единственное решение. Замена переменных приводит, очевидно, к единственному решению системы (I)-(4), (I5).

2.2.5. Пример: одномерная система с диодной нелинейностью. Рассмотрим систему, полученную в п. I.2.I при описании RLD-контура (ток i будем обозначать здесь буквой x):

$$\frac{dx}{dt} + Rx + u = e(t), \qquad (16)$$

$$x \geq 0, \quad u \leq 0, \quad x \cdot u = 0. \qquad (17)$$

Введем новые неизвестные функции j, i в соответствии с

(5):

$$u = j' - i', \quad x = i, \quad j(0) = 0. \tag{I8}$$

Система (I7) при этом превратится в уравнение упора с зазором $[0, +\infty)$. В этом простейшем случае оператор упора легко выписывается:

$$\begin{aligned} x = i = U[0, x_0; [0, +\infty)] j_t = \\ = x_0 + j(t) - \min\{\min_{0 \le s \le t} [j(s) + x_0], 0\}. \end{aligned} \tag{I9}$$

Поэтому поиск решения системы (I6), (I7) с начальным условием

$$x(0) = x_0$$

сводится к решению задачи Коши для уравнения с запаздывающим аргументом:

$$\frac{dj}{dt} + R(x_0 + j(t) - \min\{\min_{0 \le s \le t} [j(s) + x_0], 0\}) = e(t),$$

$$j(0) = 0$$

с последующим вычислением x, i по формуле (I9) и u по первой из формул (I8).

В общем случае найти оператор упора невозможно, поэтому указанное сведение интересно главным образом для качественного изучения решений, поскольку некоторые свойства оператора упора известны.

§ 2.3. Конвергентность и устойчивость

В этом параграфе будет показано, что задачу Коши (I)-(4), (I5) из § 2.2 можно рассматривать при неотрицательно определенной матрице $\mathcal{R}$ как задачу

$$X' + AX \ni e(t),$$
$$X(t_0) = X_0$$

с многозначным максимальным монотонным оператором A, которая достаточно хорошо изучена (см., например, [29]). В этом случае система конвергентна. При положительно определенной $\mathcal{R}$ часть решения X обладает экспоненциальной устойчивостью, а для части U выполнена интегральная экспоненциальная оценка. Ограниченной функции $e(t)$ соответствует ограниченное решение (X, U), а для периодической $e(t)$ существует единственное периодическое решение.

2.3.I. Определение монотонности и максимальной монотонности. Многозначный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется монотонным (см. [29], с. 20-23), если для любых x_1, x_2 из области определения $D(A)$ и любых $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$ выполнено неравенство $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0$. Монотонный оператор A называется максимальным монотонным, если выполнено одно из следующих условий:

1) для любых $x, y \in H$ из того, что при всех $\xi \in D(A)$, $\eta \in A(\xi)$ выполнено неравенство $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geqslant 0$, следует $x \in D(A)$ и $y \in A(x)$;

2) множество значений оператора $I + A$ (I - единичный оператор в H) совпадает со всем пространством H.

2.3.2. Максимальная монотонность оператора $\mathcal{R}$. Если матрица $\mathcal{R}$ неотрицательно определена, т.е. $\langle \mathcal{R}x, x \rangle \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то, очевидно, оператор $\mathcal{R}$ монотонен. Докажем его максимальную монотонность, воспользовавшись определением максимальной монотонности в форме 2). Матрица $I+\mathcal{R}$ положительно определена, так как $\langle (I+\mathcal{R})x, x\rangle \geq |x|^2$. Поэтому она обратима, что и требовалось доказать.

2.3.3. Максимальная монотонность оператора Θ. Многозначный оператор, определенный на клине K и сопоставляющий элементу $X\in K$ множество $\{V:\ V\in K^*,\ \langle V,X\rangle=0\}$ обозначим буквой Θ. Для доказательства монотонности Θ выберем произвольным образом векторы $X_1,\ X_2\in K$ и $V_1,\ V_2\in K^*$ так, чтобы $\langle V_1,X_1\rangle=0$, $\langle V_2,X_2\rangle=0$. Для них $\langle V_1,X_2\rangle\leq 0$ и $\langle V_2,X_1\rangle\leq 0$ по определению K^*. Тогда $\langle V_1-V_2,X_1-X_2\rangle=\langle V_1,X_1\rangle+\langle V_2,X_2\rangle -$ $-\langle V_2,X_1\rangle-\langle V_1,X_2\rangle\geq 0$, и монотонность Θ доказана.

Пусть теперь для некоторой пары векторов $X\in\mathbb{R}^n$, $V\in\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $\langle V-V_1,X-X_1\rangle\geq 0$ при любых $X_1\in K$, $V_1\in K^*$, для которых $\langle V_1,X_1\rangle=0$. Тогда $X\in K$. Действительно, $X=P[K]X+P[K^*]X$ и для $V_1=\lambda P[K^*]X$ $(\lambda>0)$, $X_1=P[K]X$ имеем $\langle V-V_1,X-X_1\rangle=\langle V,P[K^*]X\rangle-\lambda|P[K^*]X|^2\geq 0$ при любом $\lambda>0$. Следовательно, $P[K^*]X=0$. Аналогично доказывается принадлежность V клину K^*. Осталось показать справедливость равенства $\langle V,X\rangle=0$. С одной стороны, $\langle V,X\rangle\leq 0$, потому что $V\in K^*$, а с другой $\langle V,X\rangle\geq 0$, так как $\langle V,X\rangle=\langle V-V_1,X-X_1\rangle$, где $V_1=X_1=0$. Утверждение доказано.

2.3.4. Конвергентность. Сумма двух максимальных монотонных операторов не обязательно является максимальным монотонным оператором, однако если один из них удовлетворяет условию Липшица и определен на всем пространстве, то это так (см. [29], с. 34 лемма 2.4). Поэтому $A=\mathcal{R}+\Theta$ – максимальный монотонный оператор. Задача (1)-(4),(15) эквивалентно свелась к следующей:

$$X' + AX \ni e(t), \qquad (I)$$

$$X(t_0) = X_0. \qquad (2)$$

Возьмем два решения этой задачи X_1 и X_2 и выберем $Y_1 \in AX_1$, $Y_2 \in AX_2$ так, чтобы выполнялись равенства

$$X_1' + Y_1 = e(t), \qquad (3)$$

$$X_2' + Y_2 = e(t). \qquad (4)$$

Вычитая (4) из (3) и умножая результат скалярно на $(X_1 - X_2)$ получим

$$\langle X_1' - X_2', X_1 - X_2 \rangle + \langle Y_1 - Y_2, X_1 - X_2 \rangle = 0 \quad (t \geq t_0). \qquad (5)$$

Вследствие монотонности оператора A $\langle Y_1 - Y_2, X_1 - X_2 \rangle \geq 0$, поэтому $\langle X_1' - X_2', X_1 - X_2 \rangle \leq 0$ или $\frac{1}{2}(|X_1 - X_2|^2)' \leq 0$ $(t \geq t_0)$. Итак, функция $|\Delta X| = |X_1 - X_2|$ при $t \geq t_0$ не возрастает, т.е. система (I) конвергентна.

2.3.5. <u>Экспоненциальная устойчивость решений</u>. Потребуем дополнительно, чтобы матрица $\mathcal{R}$ была положительно определена, т.е. существовало такое $r > 0$, для которого $\langle \mathcal{R}x, x \rangle \geq r|x|^2$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда для любых $X_1, X_2 \in K$ и $Y_1 \in AX_1$, $Y_2 \in AX_2$ будет: $\langle Y_1 - Y_2, X_1 - X_2 \rangle = \langle \mathcal{R}X_1 + U_1 - \mathcal{R}X_2 - U_2, X_1 - X_2 \rangle = \langle \mathcal{R}(X_1 - X_2), X_1 - X_2 \rangle + \langle U_1 - U_2, X_1 - X_2 \rangle \geq r|X_1 - X_2|^2$, где $U_1 \in \Theta X_1$, $U_2 \in \Theta X_2$. Поэтому если X_1 и X_2 - два решения включения (I), то $\langle X_1' - X_2', X_1 - X_2 \rangle \leq -r|X_1 - X_2|^2$, или $\Delta X^2 \leq e^{-2r(t - t_0)} \Delta X_0^2$ $(\Delta X_0 = \Delta X(t_0))$,

PDF-XChange
Click to buy NOW!
www.tracker-software.com

откуда

$$|\Delta X| \le e^{-r(t-t_0)}\,|\Delta X_0| \qquad (t \ge t_0). \qquad (6)$$

Итак, если матрица $\mathcal{R}$ положительно определена, то любое решение (X, U) системы с диодной нелинейностью экспоненциально устойчиво в целом относительно X.

2.3.6. <u>Интегральная оценка ΔU</u>. Что касается функции U, то относительно неё система с диодной нелинейностью устойчива в некотором интегральном смысле. Пусть $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ – два решения системы с диодной нелинейностью, положим $\Delta U = U_1 - U_2$. Тогда

$$\Delta X' + \mathcal{R}\,\Delta X + \Delta U = 0 .$$

Проинтегрируем почленно это равенство в пределах от $t_1 \ge t_0$ до $t_2 > t_1$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta U\, dt = \Delta X(t_1) - \Delta X(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}\,\Delta X\, dt$$

Теперь для оценки интеграла в правой части воспользуемся неравенством (6):

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \Delta U\, dt\right| \le |\Delta X(t_1)| + |\Delta X(t_2)| + \int_{t_1}^{t_2} \|\mathcal{R}\|\cdot|\Delta X|\, dt \le |\Delta X_0|\, e^{-r(t_1-t_0)}(2+\|\mathcal{R}\|/r). \qquad (7)$$

Итак, по отношению к U решение системы с диодной нелинейностью интегрально экспоненциально устойчиво в том смысле, что для любых $t_2 > t_1 \ge t_0$ выполнено неравенство (7).

2.3.7. <u>Оценка X, U по норме</u>. Пусть матрица $\mathcal{R}$ положительно определена, а непрерывная функция $e(t)$ ограничена:

$$|e(t)| \leq M .$$

Тогда при $t \geq t_0$

$$|X| \leq \max\{M/r,\ |X_0|\}, \tag{8}$$

$$|U| \leq M + \|\mathcal{R}\| \cdot \max\{M/r,\ |X_0|\}. \tag{9}$$

Действительно, умножим скалярно обе части уравнения (I) из § 2.2 на X :

$$\frac{1}{2}(|X|^2)' + \langle \mathcal{R}X, X\rangle + \langle U, X\rangle = \langle e(t), X\rangle .$$

Отсюда следует неравенство $(|X|^2)' \leq -2r|X|^2 + 2M|X|$. Рассмотрим сферы $|X|^2 = \rho^2$, где $\rho > M/r$ и, следовательно, $-2r\rho^2 + 2M\rho < 0$. Для почти всех t , при которых X принадлежит объединению этих сфер (т.е. $|X| > M/r$), справедливо соотношение $(|X|^2)' < 0$. То есть при $|X| > M/r$ величина $|X|$ убывает и, следовательно, справедливо (8).

Для получения оценки U воспользуемся утверждением об ортогональности I.2.5, в силу которого $\langle X', U\rangle = 0$ всюду, где X' существует. Поэтому из первого уравнения системы с диодной нелинейностью следует, что X' и U образуют разложение вектора $e(t) - \mathcal{R}X$ на ортогональные проекции, так что $|U| \leq |e(t) - \mathcal{R}X|$. Отсюда и из (8) получается (9).

2.3.8. <u>Существование и единственность периодического решения</u>. Если в дополнение к условиям предыдущего пункта функция $e(t)$ определена на всей оси и T - периодична, то система с диодной нелинейностью имеет единственное T - периодическое решение.

Действительно, рассмотрим отображение $W: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сопоставляющее точке X_0 точку $X(t_0+T)$, где X - первая компонента решения (X, U) задачи Коши (I)-(4),(I5) из § 2.2. В силу экспоненциальной устойчивости $|W(X_0) - W(\overline{X}_0)| = |\Delta X(t_0+T)| \leq e^{-rT} |\Delta X_0|$. Следовательно, W есть сжатие и имеет единственную неподвижную точку, которая порождает единственное T - периодическое решение системы.

2.3.9. Условие положительной определенности матрицы $\mathcal{R}$ для $RLC\mathcal{D}$- цепей. Для системы с диодной нелинейностью, описывающей $RLC\mathcal{D}$- цепь при выполнении условия (L), матрица $\mathcal{R}$ обязательно является неотрицательно определенной - это следует из п.I.5.3, I.4.4. Здесь мы укажем достаточное условие положительной определенности $\mathcal{R}$.

Пусть для $RLC\mathcal{D}$- цепи, удовлетворяющей условию (L), построено дерево по правилам п. I.4.2 и выполнены следующие требования:

I) с каждой индуктивностью связи непосредственно последовательно соединено некоторое сопротивление,

2) к каждой емкости, входящей в дерево, непосредственно параллельно подключено сопротивление.

Тогда матрица $\mathcal{R}$ является положительно определенной.

Действительно,

$$\mathcal{R} = A_1^{-1/2} A_2 A_1^{-1/2}$$

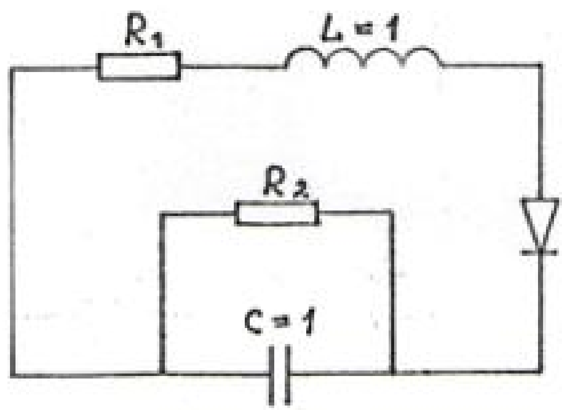
(см. п. I.5.3), где A_1 - симметричная положительно определенная матрица $\langle A_1 x, x\rangle > 0$ при $x \neq 0$. Если x - вектор, составленный из токов индуктивностей связи и напряжений емкостей дерева, то, как показано в п. I.4.3,

$$\langle A_2 x, x\rangle = \langle R i_R, i_R\rangle + \langle \overline{R}\,\overline{i}_R, \overline{i}_R\rangle . \qquad (I0)$$

В силу условий I) и 2) если $x \neq 0$, то отличен от нуля ток хотя бы одного из сопротивлений, т.е. правая часть в (I0) строго положительна.

Утверждение доказано.

2.3.I0. <u>Примеры</u>. Для изображенной ниже цепи все условия п. 2.3.9, как нетрудно видеть, выполнены.

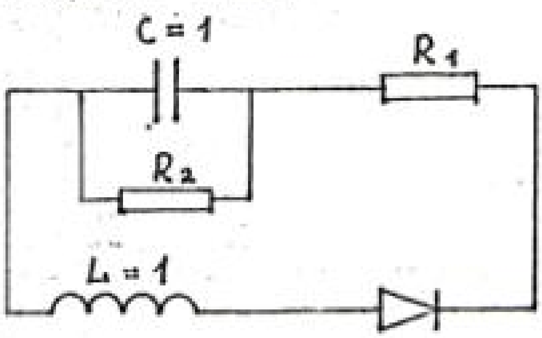


Система с диодной нелинейностью в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\bar{i}_L \\ u_C\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}R_1 & 1 \\ -1 & -1/R_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{i}_L \\ u_C\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u_D \\ 0\end{pmatrix} = 0,$$

$$\bar{i}_L \geq 0, \quad u_D \leq 0, \quad \bar{i}_L \cdot u_D = 0.$$

Матрица $\mathcal{R}$ (для рассматриваемой цепи несимметричная) является, очевидно, положительно определенной. Но при $R_1 = 0$ или $R_2 = \infty$ становится лишь неотрицательно определенной. Вообще же условия I) и 2) из предыдущего пункта не необходимы, как показывает следующий пример



Здесь нарушено условие I). Тем не менее в соответствующей системе с диодной нелинейностью матрица $\mathcal{R}$ является положительно определенной

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \bar{i}_L \\ u_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 1 \\ -1 & -1/R_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i}_L \\ u_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_D \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\bar{i}_L \geq 0, \quad u_D \leq 0, \quad \bar{i}_L \cdot u_D = 0.$$