I. Множества и операции над ними

Понятие м н о ж е с т в а относится к числу основных в математике и обычно вводится с помощью описательного определения: оно обозначает с о в о к у п н о с т ь, или с о б р а н и е каких-либо объектов (э л е м е н т о в), объединенных тем или иным образом в одно целое. Множество не обязательно содержит м н о г о элементов: оно может состоять и из одного элемента, и даже быть п у с т ы м, т.е. вовсе не иметь элементов.

I.I. Примеры множеств

I) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество всех натуральных чисел.

2) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – множество всех целых чисел.

3) $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}$ – множество всех рациональных чисел.

Перечень объектов, входящих в множество, заключают в ф и г у р н ы е скобки. Он может быть двух различных типов: в форме действительного перечисления через запятую элементов множества, как в первых двух примерах выше, или в форме указания о б щ е г о в и д а элементов и (после двоеточия) их х а р а к т е р и с т и ч е с к о г о п р и з н а к а, как в последнем примере. Значок "$\in$" читается "принадлежит" или "является элементом". Отрицание $\neg(a \in A)$ часто записывают в виде $a \notin A$.

4) $\varnothing$ – пустое множество, основное свойство которого можно записать так: $\forall(x)\,[x \notin \varnothing]$.

5) $\mathcal{U}_ц = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – множество всех арабских цифр.

6) $\mathbb{R} = \{\text{з}\, a_{-k} a_{-k+1} \ldots a_{-2} a_{-1} a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots : \forall(i)\,[a_i \in \mathcal{U}_ц] \wedge [(\text{з} = "+") \vee (\text{з} = "-")]\}$ – множество всех вещественных (действительных) чисел; вещественная ось.

7) $[a, b] = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \wedge x \leq b\}$ – отрезок вещественной оси.

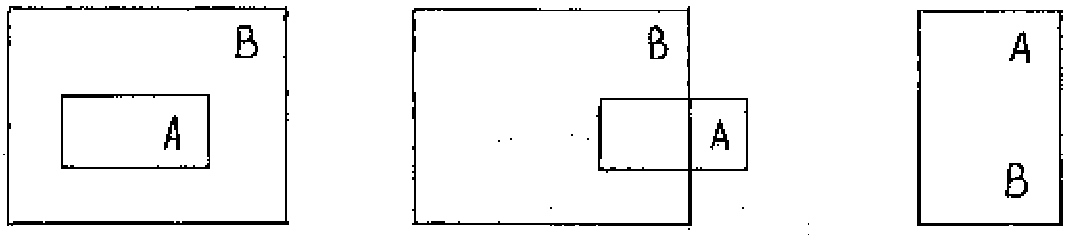
8) $[a, b) = \{x : x \in [a, b] \wedge x \neq b\}$ – полуинтервал.

9) $(a, b) = \{x : x \in [a, b) \wedge a < x\}$ – интервал.

I0) $(-\infty, b] = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b\}$ – полуось (левая).

Петрова Л.П., Садовский Б.Н. Элементы теории множеств. Конспекты лекций и задачи.

I.2. Включение и равенство



$A \subset B \quad (B \supset A)$ $\qquad$ $A \not\subset B$ $\qquad$ $A = B$

Рис. I

Соотношение " $A \subset B$ " читается: A включено в B, A содержится в B, A есть подмножество B, B содержит A; " $A \not\subset B$ " – A не содержится в B.

Определения:

$$A \subset B \overset{\text{опр}}{\longleftrightarrow} \forall(x)[x \in A \rightarrow x \in B],$$

$$A = B \overset{\text{опр}}{\longleftrightarrow} (A \subset B \wedge B \subset A) \leftrightarrow \forall(x)[x \in A \leftrightarrow x \in B].$$

Знак " $\overset{\text{опр}}{\longleftrightarrow}$ " читается: по определению эквивалентно.

Примеры: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $(a,b) \subset (a,b] \subset [a,b] \subset [a,+\infty) \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$ (т.е. существуют иррациональные вещественные числа); $[a,a] = \{a\}$ (множество, состоящее из единственного элемента a); $(a,a) = \varnothing$; $a \neq b \rightarrow [a,b] \neq [b,a]$.

Множество всех подмножеств множества A обозначается через $\mathcal{P}(A)$ (или 2^A):

$$\mathcal{P}(A) \overset{\text{опр}}{=} \{B : B \subset A\}.$$

Утверждение о включении и равенстве.

1) $A \subset A$	1') $A = A$
2) $A \subset B \wedge A \neq B \rightarrow B \not\subset A$	2') $A = B \rightarrow B = A$
3) $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$	3') $A = B \wedge B = C \rightarrow A = C$

Свойства 1), 1') называются рефлексивностью включения и равенства, 2') – симметричностью равенства, 2) – антисимметричностью включения, 3) и 3') – транзитивностью.

Упражнение. Доказать перечисленные утверждения.

I.3. Объединение, пересечение, разность и дополнение

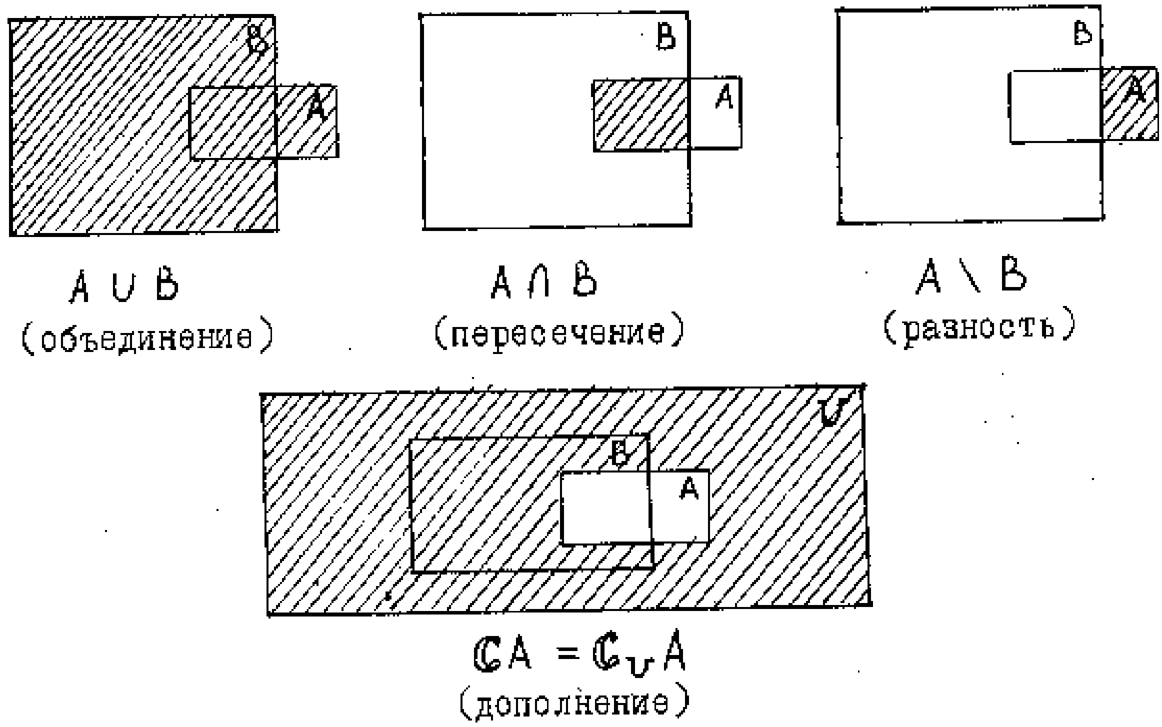


Рис. 2

Определения:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$

$$\complement A = U \setminus A.$$

Обозначения $\complement A$, $\complement B$ применяются в случае, когда все рассматриваемые множества A, B включены в некоторое фиксированное множество U.

Примеры: $(-\infty, a) \cup [a, +\infty) = \mathbb{R}$; $(-\infty, b] \cap [a, +\infty) = [a, b]$; $\complement [a, b] = \complement_{\mathbb{R}} [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$; $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q} = \varnothing$.

Утверждения об $\cup$, $\cap$, $\setminus$ и $\complement$.

Коммутативность $\cup$ и $\cap$:

1) $A \cup B = B \cup A$, 1') $A \cap B = B \cap A$.

Ассоциативность:

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, 2') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Дистрибутивность:

3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, 3') $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Законы двойственности:

4) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$, 4') $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$,

5) $\complement(B\cup C)=\complement B\cap\complement C$, 5') $\complement(B\cap C)=\complement B\cup\complement C$.

Все перечисленные утверждения с помощью определений можно перевести на язык логики и доказывать как логические соотношения. Проведем, например, доказательство формулы 4).

$$x\in A\setminus(B\cup C)\leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\cup C)\leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee$$
$$\vee x\in C)\leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge$$
$$\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\leftrightarrow x\in A\setminus B\wedge x\in A\setminus C\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C).$$

Упражнение. Доказать остальные утверждения.

I.4. Объединение и пересечение семейства множеств

Для любого $n\in\mathbb{N}$ введем обозначение $\mathbb{Q}_n=\{\frac{m}{n}:m\in\mathbb{Z}\}=\{\ldots-\frac{3}{n},-\frac{2}{n},-\frac{1}{n},\frac{0}{n},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots\}$. Придавая n различные натуральные значения, мы получаем семейство множеств $\{\mathbb{Q}_n:n\in\mathbb{N}\}$. Можно рассмотреть объединение и пересечение множеств этого семейства. Нетрудно видеть, что

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}_n=\mathbb{Q},\qquad\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}_n=\mathbb{Z}.$$

Упражнение. Доказать эти формулы.

Определение. Пусть A – множество и для любого $\alpha\in A$ M_α – множество. Тогда говорят, что задано семейство множеств $\{M_\alpha:\alpha\in A\}$. Объединение и пересечение множеств этого семейства определяются формулами:

$$\bigcup_{\alpha\in A}M_\alpha=\{x:\exists(\alpha\in A)[x\in M_\alpha]\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in A}M_\alpha=\{x:\forall(\alpha\in A)[x\in M_\alpha]\}.$$

Утверждение об $\cup$ и $\cap$ семейств множеств.

I) $\bigcup_{\alpha\in A}\bigcup_{\beta\in B}M_{\alpha\beta}=\bigcup_{\beta\in B}\bigcup_{\alpha\in A}M_{\alpha\beta}\overset{\text{(обозн.)}}{=\!=}\bigcup_{\substack{\alpha\in A\\\beta\in B}}M_{\alpha\beta}$ I') $\bigcap_{\alpha\in A}\bigcap_{\beta\in B}M_{\alpha\beta}=\bigcap_{\beta\in B}\bigcap_{\alpha\in A}M_{\alpha\beta}\overset{\text{(обозн)}}{=\!=}\bigcap_{\substack{\alpha\in A\\\beta\in B}}M_{\alpha\beta}$

2) $M\setminus\bigcup_{\alpha\in A}M_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A}(M\setminus M_\alpha)$ 2') $M\setminus\bigcap_{\alpha\in A}M_\alpha=\bigcup_{\alpha\in A}(M\setminus M_\alpha)$

3) $\bigcup_{\alpha\in A}\bigcap_{\beta\in B}M_{\alpha\beta}\subset\bigcap_{\beta\in B}\bigcup_{\alpha\in A}M_{\alpha\beta}$

Доказательство утверждения 3).

$x\in\bigcup_{\alpha\in A}\bigcap_{\beta\in B}M_{\alpha\beta}\longleftrightarrow\exists(\alpha\in A)[x\in\bigcap_{\beta\in B}M_{\alpha\beta}]\longleftrightarrow\exists(\alpha\in A)\forall(\beta\in B)$ $[x\in M_{\alpha\beta}]\rightarrow$ (по логической теореме о перестановке разноименных кванторов) $\longrightarrow\forall(\beta\in B)\exists(\alpha\in A)[x\in M_{\alpha\beta}]\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow x\in\bigcap_{\beta\in B}\bigcup_{\alpha\in A}M_{\alpha\beta}$.

Упражнение. Доказать остальные соотношения. Доказать, что в 3) в общем случае нельзя заменить включение равенством.

I.5. Декартово произведение

Из двух произвольных объектов a и b $(a\neq b)$ можно образовать две различные упорядоченные пары: (a,b) и (b,a). Упорядоченную пару (только одну) можно сконструировать и из одного объекта a: (a,a). Объекты a, b называются, соответственно, первой и второй проекциями упорядоченной пары (a,b): $a=pr_1(a,b)$, $b=pr_2(a,b)$. Упорядоченные пары мы не будем относить к множествам, так как их существенной характеристикой является порядок проекций, который для элементов множества вовсе не определен. Для произвольного множества $C\subset A\times B$ используются обозначения

$$pr_1 C=\{a:\exists(b)[(a,b)\in C]\},$$
$$pr_2 C=\{b:\exists(a)[(a,b)\in C]\}.$$

Определение декартова (или прямого) произведения множеств A и B:

$$A\times B\overset{\text{опр.}}{=}\{(a,b):a\in A\wedge b\in B\}.$$

Итак, элементами декартова произведения $A\times B$ множеств A и B являются всевозможные упорядоченные пары, первые проекции которых принадлежат A, а вторые – B. Например, $\{a,b\}\times\{0,1,2\}=$ $=\{(a,0),(a,1),(a,2),(b,0),(b,1),(b,2)\}$. Если $A=[a,b]\subset\mathbb{R}$, $B=[c,d]\subset\mathbb{R}$ то $A\times B=[a,b]\times[c,d]$

можно изобразить в виде прямоугольника.

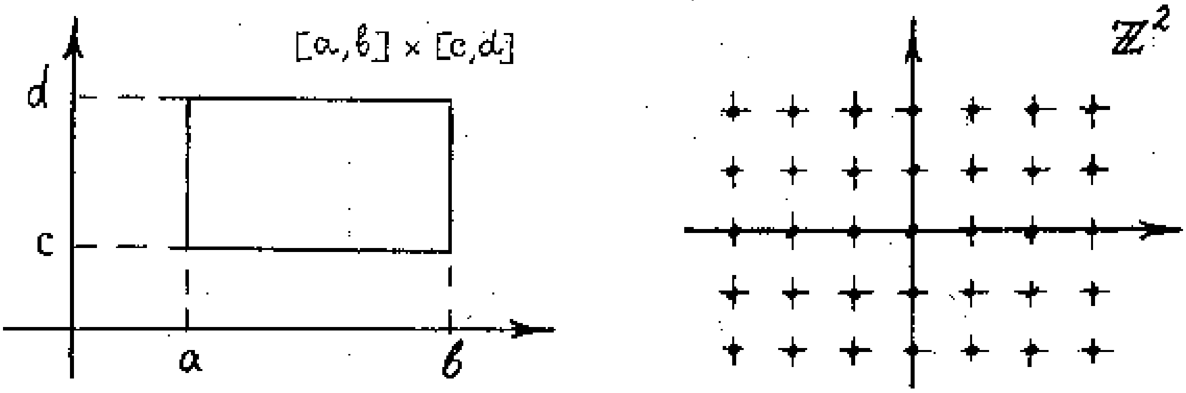


Рис. 3

Действительно, координаты точек этого прямоугольника, и только они – это упорядоченные пары (x, y), принадлежащие $[a,b]\times[c,d]$. Если $A = B = \mathbb{Z}$, то $A\times B = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = (\text{обозн.}) = \mathbb{Z}^2$ можно изобразить на плоскости в виде целочисленной решетки, т.е. множества всех точек с целочисленными координатами.

Утверждение о декартовом произведении.

1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$, 1') $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$,

2) $(A\cap A_1)\times(B\cap B_1) = (A\times B)\cap(A_1\times B_1)$,

3) $A\times B = \varnothing \leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing$.

Упражнение. Доказать сформулированные утверждения.

Декартово произведение рассматривают не только для двух, но и для большего числа сомножителей. Например,

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x, y, z) : x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{R}\}.$$

Элементы (x, y, z) данного множества – это упорядоченные наборы по 3 вещественных числа; их можно интерпретировать как точки пространства с заданной системой координат. Вообще, $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ называют n-мерным координатным вещественным пространством.

1.6. Упражнение

Доказать следующие соотношения. 1) $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$. 2) $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\cup(A\cap C)$. 3) $(A\cap B)\setminus C = (A\setminus C)\cap(B\setminus C)$. 4) $(A\cup B)\setminus B = A \leftrightarrow A\cap B = \varnothing$. 5) $(A\setminus B)\cup B = A \leftrightarrow B\subset A$.

I.7. Упражнение

Симметрическая разность множеств определяется формулой: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Доказать следующие равенства. I) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. 2) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$. 3) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. 4) Выразить операцию $\cup$ через Δ, $\cap$. 5) Выразить операцию $\cap$ через Δ, $\cup$.

I.8. Упражнение

Для произвольной последовательности множеств $(A_n : n \in \mathbb{N})$ введем обозначения: $\underline{\lim} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m$, $\overline{\lim} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$. Доказать следующие утверждения. I) $x \in \underline{\lim} A_n$, если и только если x принадлежит всем A_n, начиная с некоторого номера. 2) $x \notin \overline{\lim} A_n$, если и только если x не принадлежит ни одному из множеств A_n, начиная с некоторого номера. 3) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 4) Существует последовательность $(A_n : n \in \mathbb{N})$, для которой ни одно из включений в 3) нельзя заменить равенством. 5) Если данная последовательность возрастает $(\forall (n \in \mathbb{N}) [A_{n+1} \supset A_n])$ или убывает $(\forall (n \in \mathbb{N}) [A_{n+1} \subset A_n])$, то $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$.

I.9. Упражнение

Доказать следующие утверждения. I) $\emptyset \neq A \neq B \neq \emptyset \to A \times B \neq B \times A$. 2) $(C \subset A \times B) \to (C \subset pr_1 C \times pr_2 C)$.

2. Отношения

Отношением (точнее – отношением от двух переменных, или бинарным) будем называть предикат от двух переменных, для которого определено, какая из его переменных является первой, а какая второй.

2.I. Примеры отношений

I) $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x < y \xleftrightarrow{\text{обозн.}} R_1(x, y)$.
Если порядок переменных не оговорен, то будем считать, что они упорядочены по алфавиту; в данном примере x – первая, y – вторая.

2) (T_1 – треугольник) $\wedge$ (T_2 – треугольник) $\wedge T_1 \sim T_2 \xleftrightarrow{\text{обозн.}} R_2(T_1, T_2)$ (в данном случае порядок переменных определен индексами).

3) $x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2 \xleftrightarrow{\text{обозн.}} R_3(x,y)$.

4) $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y^2 = x \xleftrightarrow{\text{обозн.}} R_4(x,y)$.

5) $R_5(x,y) \xleftrightarrow{\text{обозн.}} R_3(x,y) \wedge x \geqslant 0$.

6) (В приводимом ниже рисунке имеется стрелка, выходящая из точки x и входящая в точку y) $\xleftrightarrow{\text{обозн.}} R_6(x,y)$.

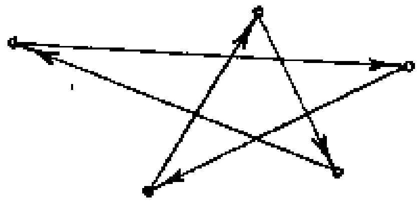


Рис. 4

7) ((x,y) – координаты точки, лежащей на изображенной ниже окружности) $\xleftrightarrow{\text{обозн.}} R_7(x,y)$.

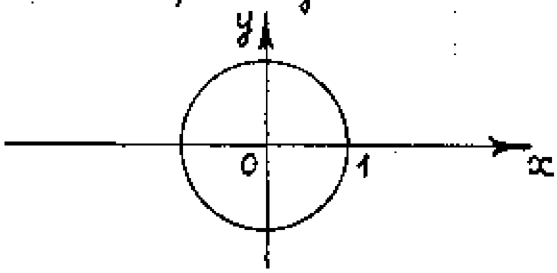


Рис. 5

2.2. Граф и график отношения

Формально г р а ф и г р а ф и к отношения R определяются одинаково:

$$\Gamma(R) = \{(x,y) : R(x,y)\}.$$

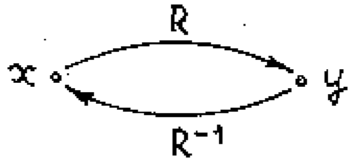
Однако они различаются способом изображения упорядоченных пар (x,y) на плоскости. Если речь идет о г р а ф е, то принадлежащая ему пара изображается в виде стрелки, выходящей из точки, служащей изображением x, в точку, изображающую y. Например, отношение R_6 в предыдущем пункте задано с помощью своего графа. На г р а ф и к е отношения (см. выше пример 7)) пара (x,y) изображается точкой, проекция которой на горизонтальную ось изображает x, а на вертикальную – y.

2.3. Примеры графов и графиков

1) Рассмотрим отношение "$A \subset B \wedge A \neq B$" (строгое включение) на множестве, состоящем из шести числовых множеств: $\mathbb{N}$, $-\mathbb{N} = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+ = \{z : z \in \mathbb{Z} \wedge z \geqslant 0\}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Его удоб-

2.4. Обратное отношение и композиция отношений

Обратное отношение R^{-1} получается из прямого R перестановкой переменных: $R^{-1}(x,y) \xleftrightarrow{\text{опр.}} R(y,x)$ Например (см. п. 2.I), $R_1^{-1}(x,y) \longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x > y$; $R_2^{-1}(T_1,T_2) \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow R_2(T_2,T_1) \leftrightarrow R_2(T_1,T_2)$ (обратное отношение совпадает с прямым); $R_3^{-1}(x,y) \longleftrightarrow y \in \mathbb{R} \wedge x = y^2$. Граф обратного отношения получается из графа прямого обращением всех стрелок; график обратного отношения симметричен графику прямого относительно биссектрисы первой и третьей четверти.



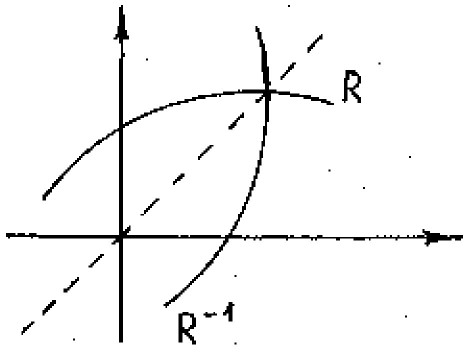
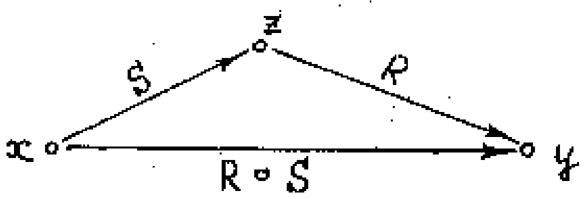


Рис. 8

Композиция $R \circ S$ отношений R и S определяется формулой:

$$(R \circ S)(x,y) \xleftrightarrow{\text{опр.}} \exists(z)[S(x,z) \wedge R(z,y)].$$

В терминах графов: стрелка $x \mapsto y$ принадлежит графу композиции $R \circ S$ тогда и только тогда, когда существует вершина z такая, что стрелка $x \mapsto z$ принадлежит S, а стрелка $z \mapsto y$ – R.



В терминах графиков композиция описывается довольно сложно.

В качестве первого примера композиции вычислим $R_3 \circ R_3^{-1}$ (см. п. 2.I):

$$(R_3 \circ R_3^{-1})(x,y) \longleftrightarrow \exists(z)[z \in \mathbb{R} \wedge x = z^2 \wedge y = z^2] \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow x \geqslant 0 \wedge y = x.$$

Композиция тех же отношений в обратном порядке получается иная:

$$(R_3^{-1}\circ R_3)(x,y) \leftrightarrow \exists(z)[x\in\mathbb{R}\wedge z=x^2\wedge y\in\mathbb{R}\wedge z=y^2] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R}\wedge x^2=y^2]\leftrightarrow[x\in\mathbb{R}\wedge(y=x\vee y=-x)].$$

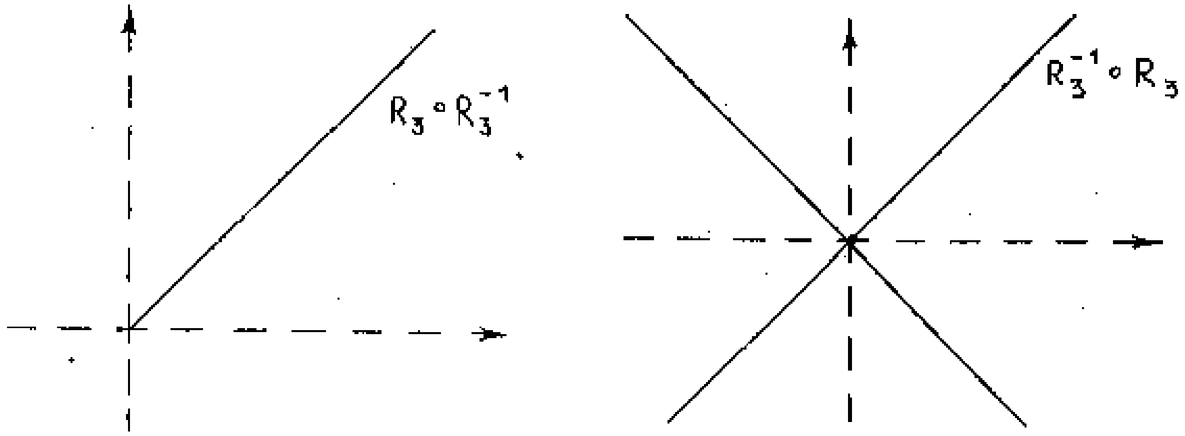


Рис. 9

В качестве последнего примера найдем композицию $R\circ R$, где R задано графом на рис. 4 в п. 2.I:

Рис. IO

2.5. Утверждение об обратном отношении и композиции

Для любых отношений R, S и T справедливы следующие утверждения:

I) $(R^{-1})^{-1}=R$,

2) $(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$,

3) $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в а удобно провести в терминах графов. Например, 2) следует из двух приводимых ниже диаграмм.

Рис. II

Первая из них последовательно расшифровывает, что стрелка $x \mapsto y$ принадлежит графу $(R \circ S) \circ T$, вторая – аналогично для $R \circ (S \circ T)$. Результаты же оказываются одинаковыми.

Упражнение. Доказать I) и 3).

2.6. Область определения и область значений, образы и прообразы

Область определения $\mathcal{D}(R)$ и область значений (образ) $\mathcal{I}m\,R$ отношения R определяются формулами:

$$x \in \mathcal{D}(R) \overset{\text{опр.}}{\longleftrightarrow} \exists(y)\, R(x, y),$$
$$y \in \mathcal{I}m\,R \overset{\text{опр.}}{\longleftrightarrow} \exists(x)\, R(x, y).$$

В терминах графов: $\mathcal{D}(R)$ – множество начал всех стрелок, принадлежащих графу R, $\mathcal{I}m\,R$ – множество концов всех этих стрелок. В терминах графиков: $\mathcal{D}(R)$ – проекция графика R на горизонтальную ось, $\mathcal{I}m\,R$ – на вертикальную.

Если A – любое множество, то его образ $R[A]$ и прообраз $R^{-1}[A]$ при отношении R определяются соотношениями:

$$y \in R[A] \overset{\text{опр}}{\longleftrightarrow} \exists(x \in A)\, R(x, y),$$
$$x \in R^{-1}[A] \overset{\text{опр}}{\longleftrightarrow} \exists(y \in A)\, R(x, y).$$

Для любого элемента x также определяются образ $R(x]$ и прообраз $R^{-1}[x)$ при отношении R:

$$R(x] = \{y : R(x, y)\},$$
$$R^{-1}[x) = \{y : R(y, x)\}.$$

Например (см. п. 2.I), $R_7[\mathbb{R}] = [-1, 1]$, $R_7^{-1}[(0,1)] = (-1, 1) \setminus \{0\}$, $R_7(0] = \{-1, 1\}$, $R_7^{-1}[1) = \{0\}$.

Отметим, что с произвольным отношением R мы связываем три разных обозначения "функционального типа": $R(x, y)$ – предикат, принимающий в зависимости от x, y значения "и" или "л"; $R[A]$ – образ множества A; $R(x]$ – образ элемента x. Необходимость различать два последних понятия вытекает из следующего примера. Пусть элементами множества M являются числа I, 2 и множество $A = \{1, 2\}$. Пусть отношение R задано графом:

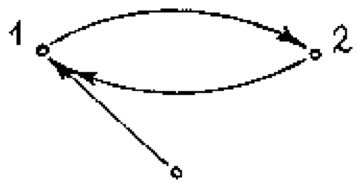


Рис. I2

Тогда $R[A]=A \neq R(A]=\{1\}$. Эта "неприятность" произошла из-за того, что в данном примере A является, с одной стороны, подмножеством $\mathcal{D}(R)$, а с другой – одним из элементов $\mathcal{D}(R)$.

Утверждение о $\mathcal{D}(R)$, $\mathcal{I}m R$, $R[A]$ и $R^{-1}[A]$.

I) $R[\mathcal{D}(R)]=\mathcal{I}m R$, I') $R^{-1}[\mathcal{I}m R]=\mathcal{D}(R)$,

2) $\mathcal{I}m R=\mathcal{D}(R^{-1})$, 2') $\mathcal{I}m(R^{-1})=\mathcal{D}(R)$,

3) $(R\circ S)[A]=R[S[A]]$, 3') $(R\circ S)^{-1}[B]=S^{-1}[R^{-1}[B]]$,

4) $\mathcal{D}(R\circ S)=S^{-1}[\mathcal{D}(R)]\subset\mathcal{D}(S)$, 4') $\mathcal{I}m\, R\circ S=R[\mathcal{I}m S]\subset\mathcal{I}m R$,

5) $R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$, 5') $R^{-1}[A\cup B]=R^{-1}[A]\cup R^{-1}[B]$,

6) $R[A\cap B]\subset R[A]\cap R[B]$, 6') $R^{-1}[A\cap B]\subset R^{-1}[A]\cap R^{-1}[B]$,

7) $R[A\setminus B]\supset R[A]\setminus R[B]$, 7') $R^{-1}[A\setminus B]\supset R^{-1}[A]\setminus R^{-1}[B]$.

Докажем 4).

$$x\in\mathcal{D}(R\circ S)\longleftrightarrow\exists(y)[(R\circ S)(x,y)]\longleftrightarrow\exists(y,z)[S(x,z)\wedge R(z,y)]$$

$$x\in S^{-1}[\mathcal{D}(R)]\longleftrightarrow\exists(z)[z\in\mathcal{D}(R)\wedge S(x,z)]\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow\exists(z,y)[R(z,y)\wedge S(x,z)].$$

Полученные в правых частях предикаты, очевидно, эквивалентны. Кроме того, из каждого из них следует, что $x\in\mathcal{D}(S)$. Утверждение доказано.

Упражнение. Доказать остальные соотношения. Доказать, что в 6) и 6') равенств может не быть.

3. Функции, инъекции и взаимно однозначные отношения

Отношение R называется функцией (R – фн), если в его графе никакие две разные стрелки не выходят из одной точки, и инъекцией, или вложением (R – ин), если никакие две разные стрелки не входят в одну точку. Если

R -фн $\wedge$ R -ин, то R называют *взаимно однозначным отношением* (R - воо).

3.I. Определения и обозначения

Итак, если R - отношение, то

$$R\text{-фн} \xleftrightarrow{\text{опр}} \forall(x, y_1, y_2)\,[R(x,y_1)\wedge R(x,y_2)\rightarrow y_1=y_2],$$

$$R\text{-ин} \xleftrightarrow{\text{опр}} \forall(x_1, x_2, y)\,[R(x_1,y)\wedge R(x_2,y)\rightarrow x_1=x_2],$$

$$R\text{-воо} \xleftrightarrow{\text{опр}} R\text{-фн} \wedge R\text{-ин}.$$

В терминах графиков: R есть функция тогда и только тогда, когда любая вертикальная прямая пересекает график R не более чем в одной точке; R есть инъекция в том и только том случае, если любая горизонтальная прямая пересекается с графиком R не более чем в одной точке.

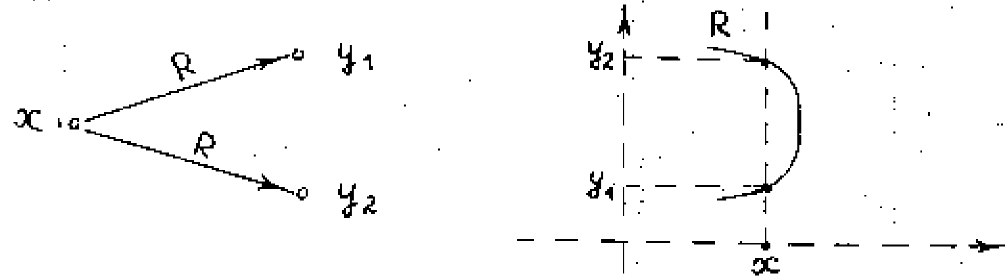


Рис. 13. R не функция

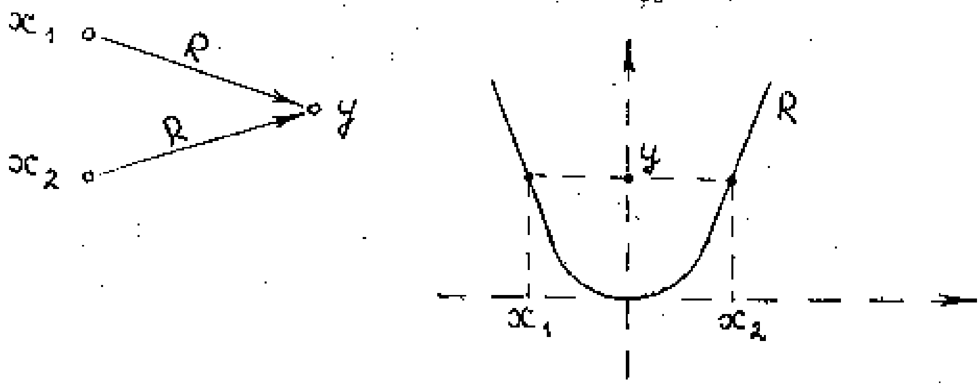


Рис. 14. R не инъекция

Примеры: в п. 2.I отношение R_3 есть функция, но не инъекция; R_4 - инъекция, но не функция; R_5 и R_6 - взаимно однозначные соответствия (отношения); R_1, R_2 и R_7 - не функции и не инъекции.

Функции называют также отображениями, операторами, функционалами, преобразованиями и т.п. Часто используются обозначения

$$(F : A \rightarrow B) \xleftrightarrow{\text{обозн.}} (F\text{-фн} \wedge \mathcal{D}(F) = A \wedge \mathcal{I}m\, F \subset B),$$

$$(F: A \xrightarrow[\text{на}]{} B) \overset{\text{обозн}}{\longleftrightarrow} ((F: A \to B) \wedge \operatorname{Im} F = B).$$

Мы будем также применять обозначения:

$$(R: A \leftarrow B) \overset{\text{обозн}}{\longleftrightarrow} (R\text{-ин} \wedge \mathcal{D}(R) \supset A \wedge \operatorname{Im} R \subset B),$$

$$(R: A \leftrightarrow B) \overset{\text{обозн}}{\longleftrightarrow} (R\text{-воо} \wedge \mathcal{D}(R) = A \wedge \operatorname{Im} R = B).$$

Например, $R_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $R_5: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$; $R_3: \mathbb{R} \xrightarrow[\text{на}]{} [0,+\infty)$; $R_5: [0,+\infty) \xrightarrow[\text{на}]{} [0,+\infty)$.

Для функции F и элемента $x \in \mathcal{D}(F)$ множество $F(x]$ состоит ровно из одного элемента y ; в этом случае будем использовать обозначение $y = F(x)$. Точно так же для инъекции I и $y \in \operatorname{Im} I$ будем писать $I^{-1}(y)$, имея в виду тот единственный x , для которого $I(x,y)$. Для взаимно однозначных отношений можно применять оба эти обозначения.

3.2. Утверждение о функциях и инъекциях

$$\text{I)}\quad F\text{-фн} \longleftrightarrow F^{-1}\text{-ин},$$

2) $F\text{-фн} \to F(A] = \{F(x) : x \in A \cap \mathcal{D}(F)\}$, 2') $I\text{-ин} \to I^{-1}[B] = \{I^{-1}(y) : y \in B \cap \operatorname{Im} I\}$,

3) $F\text{-фн} \wedge G\text{-фн} \to F \circ G\text{-фн}$, 3') $I\text{-ин} \wedge J\text{-ин} \to I \circ J\text{-ин}$,

4) $F\text{-фн} \wedge G\text{-фн} \to (F \circ G)(x) = F(G(x))$, 4') $I\text{-ин} \wedge J\text{-ин} \to (I \circ J)^{-1}(y) = J^{-1}(I^{-1}($

5) $F\text{-фн} \to F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B]$, 5') $I\text{-ин} \to I[A \cap B] = I[A] \cap I[B]$.

Докажем 3). В предположении, что $F \circ G$ не есть функция, получим следующую диаграмму.

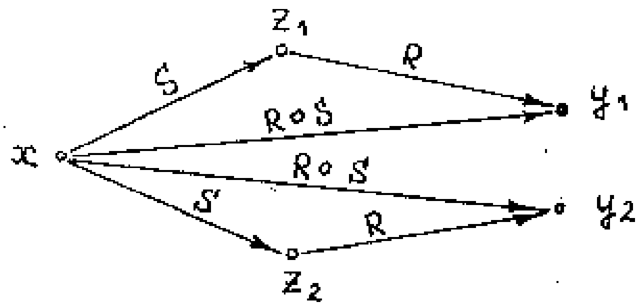


Рис. I5

Если при этом $z_1 \neq z_2$, то S – не функция, что противоречит условию. Если же $z_1 = z_2$, то R – не функция, и мы вновь получаем противоречие. Утверждение доказано.

Упражнение. Доказать остальные утверждения.

4. Мощности множеств

М о щ н о с т ь $\overline{\overline{A}}$ конечного множества A – это число его элементов. Поэтому с р а в н и т ь мощности $\overline{\overline{A}}$ и $\overline{\overline{B}}$ двух конечных множеств можно с помощью счета. Однако существует и другая возможность. Если, например группа студентов A вошла в буфет, в котором имеется множество булочек B, то проверить справедливость неравенства $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ можно без счета: если каждому студенту удается купить хотя бы по одной булочке, причем никакие два студента не будут покупать одну булочку на двоих (или больше чем на двоих), то требуемое неравенство будет доказано. В этом примере сравнение произведено путем установления о т н о ш е н и я $R(x,y)$: человек x купил булочку y. Тот факт, что булочек хватило на всех интересующих нас студентов, можно записать в виде: $\mathcal{D}(R) \supset A$. То, что булочки куплены именно в данном буфете, выражается включением: $\mathcal{Im}\, R \subset B$. Наконец, требование, чтобы каждая булочка досталась не более чем одному студенту, означает, что R должно быть инъекцией.

Как заметил Георг Кантор, описанный способ сравнения можно применять и к бесконечным множествам.

4.I. Вложимость и равномощность

Будем говорить, что множество A в л о ж и м о в множество B, и писать $A \lessapprox B$, если существует инъекция R, для которой $\mathcal{D}(R) \supset A$ и $\mathcal{Im}\, R \subset B$, т.е. существует отношение $R: A \leftarrow B$.

П р и м е р ы.

I) $\{0\} \lessapprox \{1,2\}$. Вложение осуществляется, например, отношением $0 \overset{R}{\longmapsto} 1$.

2) $\{1,2\} \not\lessapprox \{0\}$. Действительно, граф любого отношения R, для которого $\mathcal{D}(R) \supset \{1,2\}$ и $\mathcal{Im}\, R \subset \{0\}$, содержит стрелки $1 \longmapsto 0$ и $2 \longmapsto 0$ и, следовательно, не является инъекцией.

3) $\mathbb{N} \lessapprox \mathbb{N}_{чет} = \{n : n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ четно}\}$. Вложение: $n \in \mathbb{N} \longmapsto m = 2n \in \mathbb{N}_{чет}$.

4) Очевидно, $\mathbb{N}_{чет} \lessapprox \mathbb{N}$ (вложение: $n \in \mathbb{N}_{чет} \longmapsto m = n \in \mathbb{N}$).

5) $\mathbb{N} \lesssim [0,1]$. Вложение: $n \in \mathbb{N} \mapsto x = \frac{1}{n} \in [0,1]$.

6) $[0,1] \lesssim \mathbb{N}$? Отрицательный ответ на этот вопрос дает теорема Г. Кантора о несчетности отрезка $[0,1]$, которая будет доказана ниже. Вместе с предыдущим примером ее можно трактовать так: в отрезке $[0,1]$ элементов "строго больше", чем в $\mathbb{N}$

7) $\mathbb{R} \lesssim [0,1]$. Вложение можно построить в виде композиции $(y \in \mathbb{R}) \mapsto (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : y = tg\, x) \mapsto (z = \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \in [0,1])$.

8) Любое множество A вложимо в множество $\mathcal{P}(A)$ всех его подмножеств, но не равномощно ему:

$$A \lesssim \mathcal{P}(A) \wedge \mathcal{P}(A) \not\approx A.$$

Эта теорема Кантора (она будет ниже доказана) позволяет утверждать, что существует бесконечно много не равномощных друг другу бесконечных множеств: $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \ldots$

$A \approx B : A \lesssim B \wedge B \lesssim A$ — [illegible]

4.2. Утверждение о вложимости и равномощности

1) $(A \lesssim B) \longleftrightarrow \exists (F)[F - воо \wedge F : A \to B]$,

2) $(A \subset B) \to (A \lesssim B)$, 2') $(A = B) \to (A \approx B)$,

3) $(A \lesssim B) \wedge (B \lesssim C) \to (A \lesssim C)$, 3') $(A \approx B) \wedge (B \approx C) \to (A \approx C)$,

4) $(A \lesssim X) \wedge (B \lesssim Y) \wedge (X \cap Y = \varnothing) \to (A \cup B) \lesssim (X \cup Y)$,

5) $(A \lesssim X) \wedge (B \lesssim Y) \to ((A \times B) \lesssim (X \times Y))$.

Д о к а ж е м 1). Если существует взаимно однозначное отношение $F : A \to B$, то, очевидно, $A \lesssim B$, так как F является инъекцией, о которой идет речь в определении вложимости. Пусть теперь дано, что $A \lesssim B$, т.е. существует инъекция R, для которой $\mathcal{D}(R) \supset A$ и $\mathcal{J}m R \subset B$. Тогда для любого $x \in A$ множество $R[x)$ непусто. Выберем в нем какой-нибудь один элемент y и обозначим его через $F(x)$. Тогда отношение $x \in A \mapsto y = F(x)$ будет искомым взаимно однозначным отображением A в B. Утверждение 1) доказано.

Д о к а ж е м 4). Пусть $R : A \leftarrow X$ и $S : B \leftarrow Y$. Построим отношение $T(x,y) \xleftrightarrow{опр} R(x,y) \vee S(x,y)$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(R) \cup \mathcal{D}(S) \supset A \cup B$ и $\mathcal{J}m T = \mathcal{J}m R \cup \mathcal{J}m S \subset X \cup Y$. Наконец, из условия $X \cap Y = \varnothing$ вытекает, что T есть инъекция. Действительно, если две разные стрелки графа T входят в одну точку, то они не могут обе принадлежать графу R (R-ин) или графу S (S-ин). Значит, одна из них принадлежит графу R, а вторая - графу S. Поскольку конец первой принадлежит X, а конец второй (та же точка) - Y, мы получаем противоречие с условием $X \cap Y = \varnothing$. Итак, $T: A \cup B \leftarrow\!\!\!\!- X \cup Y$, и утверждение доказано.

Упражнение. Доказать остальные утверждения.

4.3. Эквивалентность множеств. Теорема Шредера - Кантора - Бернштейна

Говорят, что множество A *эквивалентно* множеству B, если существует $F: A \leftrightarrow B$.

Например, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_{\text{чет}}$, потому что построенное в примере 3) пункта 4.I отношение $n \mapsto 2n$ на самом деле взаимно однозначно отображает $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}_{\text{чет}}$. Можно ли утверждать, что $\mathbb{R} \sim [0,1]$? (Напомним, из примера 7) п. 4.I следует, что $\mathbb{R} \approx [0,1]$). Ответ положительный, хотя получить его непосредственно не очень легко.

Упражнение. Доказать без использования приводимой ниже теоремы Шредера - Кантора - Бернштейна, что $\mathbb{R} \sim [0,1]$.

Теорема. $(A \sim B) \leftrightarrow (A \approx B)$.

Доказательство. Импликация слева направо очевидна, так как если $F: A \leftrightarrow B$, то $F: A \leftarrow B$ и $F^{-1}: B \leftarrow A$. Докажем обратную импликацию. Пусть $f: A \to B$-воо и $g: B \to A$-воо.

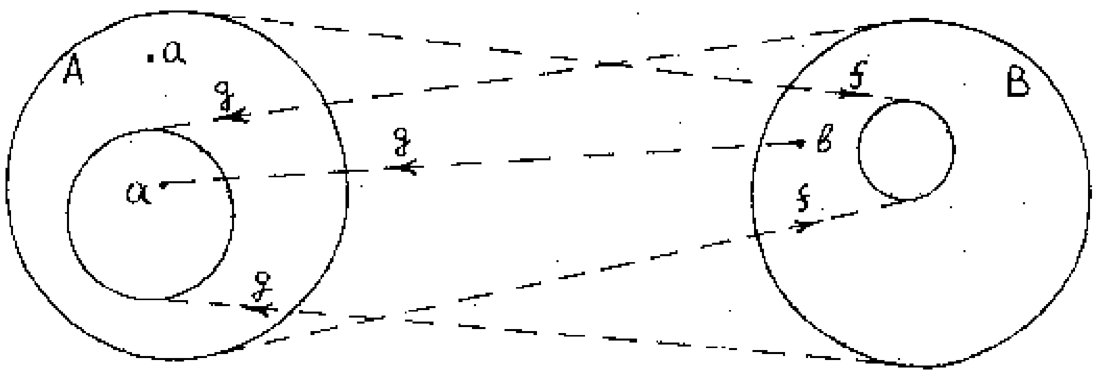


Рис. I6

Нам нужно построить $F: A \leftrightarrow B$. У любого элемента $a \in A$ может существовать, а может и не существовать "предшественник", т.е. такой элемент $b \in B$, что $g(b) = a$. Если b существует, то только один, так как g -воо. В свою очередь, элемент b может иметь (единственного) или не иметь предшественника - такого элемента $\bar{a}$, что $f(\bar{a}) = b$. И так далее. Итак, для любого $a \in A$ существует вполне определенная конечная или бесконечная "последовательность предшественников". Разобьем A на три не пересекающиеся между собой части,

$$A = A_{чет} \cup A_{нечет} \cup A_\infty ,$$

по следующему признаку: $a \in A_{чет}$, если длина последовательности предшественников a конечна и четна (в частности, возможно, равна 0); $a \in A_{нечет}$, если эта длина нечетна; $a \in A_\infty$, если она бесконечна. Построим аналогичное разбиение множества B :

$$B = B_{нечет} \cup B_{чет} \cup B_\infty .$$

Заметим теперь, что

$$f[A_{чет}] = B_{нечет} . \qquad (*)$$

Действительно, если $b \in f[A_{чет}]$, то $b = f(a)$, где a имеет четную последовательность предшественников. Для b в последовательность предшественников войдет еще элемент a, так что $b \in B_{нечет}$. Пусть, наоборот, $b \in B_{нечет}$. Тогда хотя бы один предшественник a у b есть, так как 0 - число четное: $f(a) = b$. Как уже отмечалось, у a последовательность предшественников на единицу короче, чем у b, т.е. $a \in A_{чет}$. Следовательно $b \in f[A_{чет}]$, и равенство (*) доказано. Аналогично доказывается, что $g[B_{чет}] = A_{нечет}$ и $f[A_\infty] = B_\infty$. Учитывая, что f и g - воо, можем построить теперь искомое отображение $F: A \longleftrightarrow B$ следующим образом:

$$F(a) = \begin{cases} f(a), & \text{если} \quad a \in A_{чет} \cup A_\infty , \\ g^{-1}(a), & \text{если} \quad a \in A_{нечет} . \end{cases}$$

Теорема доказана.
В частности, из этой теоремы следует, что $\mathbb{R} \sim [0, 1]$.

4.4. Счетные множества

Множество A называется с ч е т н ы м, если оно эквивалентно $\mathbb{N}$.

Равносильная формулировка: множество называется счетным, если его элементы можно п р о н у м е р о в а т ь различными натуральными числами,"израсходовав"на это все множество $\mathbb{N}$. Впрочем, эта не вполне строгая формулировка означает в точности существование отображения $F: A \longleftrightarrow \mathbb{N}$, которое и можно назвать "нумерацией" элементов множества A .

Например, счетно само $\mathbb{N}$ и, как было показано выше, его подмножество $\mathbb{N}_{чет}$.

Т е о р е м а о счетных множествах.

1) $\mathbb{N}^n$ счетно для любого $n\in\mathbb{N}$.
2) Если $A\lesssim\mathbb{N}$ и $\forall(\alpha\in A)[M_\alpha\lesssim\mathbb{N}]$, то $\bigcup\limits_{\alpha\in A}M_\alpha\lesssim\mathbb{N}$.
3) Если A бесконечно, то $\mathbb{N}\lesssim A$, т.е. счетные множества являются "наименьшими" среди всех бесконечных множеств.
4) Если A бесконечно и $B\lesssim\mathbb{N}$, то $A\cup B\sim A$, т.е. "количество" элементов бесконечного множества не меняется от присоединения к нему конечного или счетного множества.

Доказательство. 1) Вложимость $\mathbb{N}^n\lesssim\mathbb{N}$ устанавливается с помощью отображения $(m_1, m_2, \dots, m_n)\in\mathbb{N}^n\mapsto K=2^{m_1}\cdot 3^{m_2}\cdot 5^{m_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{m_n}\in\mathbb{N}$. Здесь p_n – n-ное простое число. Инъективность этого отношения следует из единственности разложения числа K на простые множители. Обратное вложение устанавливает, например, отображение $m\in\mathbb{N}\mapsto(m,1,1,\dots,1)\in\mathbb{N}^n$. Первое утверждение доказано.

Докажем 2). Заметим, что для любого $\alpha\in A$

$$M_\alpha\lesssim M_\alpha\times\{\alpha\};$$

вложение осуществляется отображением $x\in M_\alpha\mapsto(x,\alpha)\in M_\alpha\times\{\alpha\}$. Этот формальный прием замены каждого элемента $x\in M_\alpha$ упорядоченной парой (x,α) мы применяем для того, чтобы в дальнейшем иметь дело с попарно не пересекающимися множествами:

$$\bigcup_{\alpha\in A}M_\alpha\lesssim\bigcup_{\alpha\in A}(M_\alpha\times\{\alpha\})\lesssim\bigcup_{\alpha\in A}(\mathbb{N}\times\{\alpha\})=\mathbb{N}\times\bigcup_{\alpha\in A}\{\alpha\}\lesssim\mathbb{N}\times\mathbb{N}\lesssim\mathbb{N}.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 3) будет доказано, если мы покажем, что в A можно выделить счетное подмножество. Возьмем в (бесконечном) множестве A один произвольный элемент, обозначим его через a_1 и рассмотрим множество $A_1=A\setminus\{a_1\}$. Оно тоже бесконечно. Выберем в нем любой элемент, обозначим его через a_2 и рассмотрим множество $A_2=A_1\setminus\{a_2\}$. Ясно, что этот процесс последовательного выделения элементов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ не может прерваться на конечном шаге, так как все получающиеся множества A_n бесконечны (и, следовательно, непусты). Итак, в A существует бесконечная последовательность различных элементов $(a_n : n\in\mathbb{N})$, т.е. счетное подмножество. Следовательно, $\mathbb{N}\lesssim A$.

Наконец, докажем 4). Положив $B_1=B\setminus A$, будем иметь:

$$A\cup B=A\cup B_1,$$

где B_1 не имеет с A общих элементов и $B_1\lesssim\mathbb{N}$. Воспользовавшись предыдущим утверждением, выделим в A счетное подмножество A_1:

$$A \cup B_1 = (A_0 \cup A_1) \cup B_1 = A_0 \cup (A_1 \cup B_1).$$

В силу 2) множество $A_1 \cup B_1$ счетно и, следовательно, эквивалентно A_1. Поэтому

$$A \cup B = A \cup B_1 \sim A_0 \cup A_1 = A,$$

что и требовалось доказать.

Теорема о счетных множествах полностью доказана.

Отметим, что из 3) вытекает следующий удобный признак счетного множества: если бесконечное множество A вложимо в $\mathbb{N}$, то оно счетно (можно уже не доказывать, что $\mathbb{N} \lesssim A$).

С помощью 2) легко устанавливается, что счетно множество $\mathbb{Z}$, так как $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$. Далее, отсюда и из утверждения I) выводится счетность $\mathbb{Q}$. Действительно, отношение $(q \in \mathbb{Q} \mapsto (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}: q = \frac{m}{n})$ инъективно (разные числа не могут представляться одной и той же дробью), поэтому $\mathbb{Q} \lesssim \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \lesssim \mathbb{N}^2 \lesssim \mathbb{N}$.

Упражнение. Доказать счетность следующих множеств. I) Множества всех окружностей на плоскости с целочисленными координатами центров и рациональными радиусами. 2) Любого бесконечного множества A попарно не пересекающихся интервалов (α, β) на числовой прямой $\mathbb{R}$. 3) Множества $\mathcal{P}_n$ всех многочленов $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$ степени не выше n с целочисленными коэффициентами. 4) Множества $\mathcal{P}$ всех многочленов от переменной x с целочисленными коэффициентами. 5) Множества A всех алгебраических чисел, т.е. таких, которые являются корнями многочленов с целочисленными коэффициентами. 6) Множества всех конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.

4.5. Теорема Кантора о несчетности отрезка $[0, 1]$

Отрезок $[0,1]$ не эквивалентен $\mathbb{N}$.

Доказательство. Предположим противное: пусть все числа отрезка $[0,1]$ можно пронумеровать различными натуральными числами:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,\ x_{11}\, x_{12} \ldots x_{1n} \ldots \\ x_2 = 0,\ x_{21}\, x_{22} \ldots x_{2n} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = 0,\ x_{n1}\, x_{n2} \ldots x_{nn} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Построим, тем не менее, такое число $y \in [0,1]$,

$$y = 0, y_1 y_2 \dots y_n \dots ,$$

которое не получило никакого номера. Для этого достаточно выбрать десятичные цифры y_n $(n=1,2,\dots)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$y_n \neq x_{nn}, \quad y_n \neq 0, \quad y_n \neq 9.$$

Первое из этих условий означает, что у чисел y и x_n различны n-ные десятичные цифры. Поэтому числа y и x_n могут совпадать лишь в том случае, если у одного из них имеется "хвост" из нулей, а у другого - из девяток. Но в числе y после запятой, по построению, нет ни нулей, ни девяток. Итак, для любого $n \in \mathbb{N}$ $y \neq x_n$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение. A называется множеством мощности континуума (мощности C), если $A \sim [0,1]$.

Например, $\mathbb{R}$ есть множество мощности C, так как ранее установлено, что $\mathbb{R} \lessapprox [0,1]$, и $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Предыдущая теорема означает, что $\mathbb{N}$, как и любое другое счетное множество, не является множеством мощности C.

4.6. Определение мощности

Мощностью множества A назовем класс всех множеств B, вложимых в A. Мощность A обозначается $\bar{\bar{A}}$, или $card A$, или $|A|$. По определению,

$$B \in \bar{\bar{A}} \longleftrightarrow B \lessapprox A.$$

Если $B \lessapprox A$, то $\bar{\bar{B}} \subset \bar{\bar{A}}$; в этом случае пишут также $\bar{\bar{B}} \leqslant \bar{\bar{A}}$. Если при этом $A \not\lessapprox B$, то используют обозначение $\bar{\bar{B}} < \bar{\bar{A}}$. Итак, сравнение мощностей - это сравнение классов по включению. Использование в этой ситуации термина "класс" вместо "множества" - это условное предупреждение о том, что со столь обширными совокупностями объектов нужно обращаться с осторожностью. В частности, известно, что использование классов в качестве элементов для построения еще более емких объектов может приводить к так называемым парадоксам теории множеств, т.е. к логическим противоречиям.

Некоторые мощности имеют стандартные обозначения. Например, $\bar{\bar{\mathbb{N}}} = \aleph_0$ ($\aleph$ - "алеф" - первая буква древнееврейского алфавита). Ввиду сложности начертания этой буквы пишут и просто $\bar{\bar{\mathbb{N}}} = a$.

Для $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{[0,1]}}$ используют обозначения C и $2^{\aleph_0}$.

Перед формулировкой следующей теоремы введем одно удобное обозначение: A^B означает множество всех функций $F: B \to A$. Например, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ – это множество всех вещественных функций вещественного аргумента, определенных на всей оси; $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ – множество всех (бесконечных) последовательностей действительных чисел; $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ – множество всех (бесконечных) последовательностей из нулей и единиц.

Упражнение. Доказать, что из $B \sim C$ следует, что $A^B \sim A^C$. Указание: пусть $\varphi: B \leftrightarrow C$; тогда эквивалентность A^C и A^B устанавливается отношением: $(f: C \to A) \mapsto (g = f \circ \varphi: B \to A)$.

4.7. Теорема о множествах мощности C

1) $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim [0,1]$.
2) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim [0,1]$.
3) Объединение континуума множеств мощности C есть множество мощности C.

Доказательство 1) и 2). Мы докажем цепочку

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \precsim [0,1] \precsim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \qquad (*)$$

из которой будут следовать эквивалентности 1) и 2), поскольку $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ и, следовательно, $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (см. упражнение выше).

Каждой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$ из нулей и единиц сопоставим число x, записанное в виде бесконечной десятичной дроби:

$$x = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots$$

Очевидно, $x \in [0,1]$ и соответствие $\varepsilon \mapsto x$ инъективно, так как число x может иметь различные десятичные ~~приближения~~ представления лишь в случае, если одно из них имеет "хвост" из девяток; но все ε_k равны 0 или 1. Итак, первое соотношение в цепочке $(*)$ доказано.

Отображение $x \in [0,1] \mapsto (x, x, \ldots, x, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ показывает, что справедливо и второе.

Для доказательства последнего соотношения зафиксируем какую-нибудь одну нумерацию различными натуральными числами всех рациональных чисел (она существует, так как $\mathbb{Q}$ счетно): $(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots)$. Теперь любой последовательности $x =$

$=(x_n : n\in\mathbb{N})\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ сопоставим функцию $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\{0,1\}$ следующим образом: $f(m,n)=1$, если $q_m<x_n$; в противном случае $f(m,n)=0$. Проверим, что соответствие $x\mapsto f$ инъективно. Действительно, если $x\mapsto f$ и $y\mapsto f$ и $x_{n_0}\neq y_{n_0}$ (для определенности, $x_{n_0}<$ $<y_{n_0}$), то найдется рациональное q_m такое, что $x_{n_0}<q_m<y_{n_0}$. Но это означало бы, что $f(m,n_0)=1$ и $f(m,n_0)=0$. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $x=y$. Утверждения 1) и 2) полностью доказаны.

Пусть, наконец, $\overline{\overline{A}}=C$ и для любого $\alpha\in A$ $\overline{\overline{M}}_\alpha=C$. Тогда $[0,1]\sim M_{\alpha_0}\subset\bigcup_{\alpha\in A}M_\alpha\precsim\bigcup_{\alpha\in A}M_\alpha\times\{\alpha\}\precsim\bigcup_{\alpha\in A}[0,1]\times\{\alpha\}\precsim[0,1]\times A\precsim\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\sim[0,1]$.

Теорема доказана.

а) $A=R\times R$
б) $A=R^n$

Упражнение. 1) Найти мощность множества всех квадратов на плоскости. 2) Найти мощность множества всех (бесконечных) возрастающих последовательностей целых чисел. 3) Найти мощность множества всех вещественных чисел, в десятичных представлениях которых отсутствует цифра 0.

4.8. Мощность множества $\mathcal{P}(A)$

Напомним, что $\mathcal{P}(A)$ (или 2^A) – это множество всех подмножеств множества A.

Упражнение. Доказать, что если A конечно и $|A|=n$, то $|\mathcal{P}(A)|=2^n$.

Упражнение. Доказать, что $\mathcal{P}(A)\sim\{0,1\}^A$ для любого множества A. Указание: множеству $B\in\mathcal{P}(A)$ сопоставить его характеристическую функцию:

$$f_B(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in B,\\ 0, & \text{если } x\in A\setminus B.\end{cases}$$

В силу этой эквивалентности и утверждения 1) теоремы 4.7 $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=C$.

Теорема Кантора. Для любого множества A

$$|\mathcal{P}(A)|>|A|. \qquad (*)$$

Доказательство. Множество A вложимо в $\mathcal{P}(A)$: $a\in A\mapsto\{a\}\in\mathcal{P}(A)$. Следовательно, $|A|\leq|\mathcal{P}(A)|$. Докажем от противного, что $|A|\neq|\mathcal{P}(A)|$, т.е. $A\not\sim\mathcal{P}(A)$. Пусть f: $A\leftrightarrow\mathcal{P}(A)$. Рассмотрим множество $A_0=\{a\in A: f(a)\not\ni a\}$, и пусть $a_0=f^{-1}(A_0)$, т.е. $f(a_0)=A_0$. Если при этом $a_0\in A$, то есть $a_0\in f(a_0)$, то, по определению A_0, $a_0\notin A_0$. Это противоречие показывает, что $a_0\notin A_0$. Но это значит, что $a_0\notin$ $\notin f(a_0)$, а тогда должно быть верным соотношение $a_0\in A_0$. Мы получили противоречие, которое показывает, что наше предположение об эквивалентности A и $\mathcal{P}(A)$ неверно.

Теорема доказана.

Она, в частности, показывает, что $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = C < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))| < \ldots$, т.е. процесс построения множеств все большей мощности можно продолжить неограниченно.

Упражнение. Доказать, что $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.

5. Отношения эквивалентности и разбиения

Отношение E называется отношением эквивалентности (на $\mathcal{D}(E)$), если оно симметрично: $\forall(x,y)[E(x,y) \to E(y,x)]$ и транзитивно: $\forall(x,y,z)[E(x,y) \wedge E(y,z) \to E(x,z)]$. Из симметричности и транзитивности вытекает, что оно обладает также свойством рефлексивности: $\forall(x \in \mathcal{D}(E))\, E(x,x)$.

Разбиение множества M – это любое множество S его непустых попарно не пересекающихся подмножеств, дающее в объединении все M: $A \in S \to A \subset M \wedge A \neq \emptyset$; $A \in S \wedge B \in S \wedge A \neq B \to A \cap B = \emptyset$; $\bigcup_{A \in S} A = M$.

Эти два понятия тесно между собой связаны.

5.1. Примеры отношений эквивалентности

1) $E_1(x,y) \xleftrightarrow{\text{обозн}} x = y$.
2) $E_2(x,y) \xleftrightarrow{\text{обозн}}$ (x и y – студенты одной группы).
3) $E_3(T_1,T_2) \xleftrightarrow{\text{обозн}}$ (треугольник T_1 подобен треугольнику T_2).
4) $E_4(A,B) \xleftrightarrow{\text{обозн}}$ (множество A равномощно множеству B).
5) $E_5(\ell_1,\ell_2) \xleftrightarrow{\text{обозн}}$ (прямая ℓ_1 параллельна прямой ℓ_2).

Упражнение. Доказать, что $E_1 - E_5$ – отношения эквивалентности.

Следующие отношения не являются отношениями эквивалентности.

6) Прямая ℓ_1 пересекается с прямой ℓ_2. (Симметрично, но не транзитивно).
7) (A – множество) $\wedge$ (B – множество) $\wedge$ ($A \subset B$). (Транзитивно, но не симметрично).

5.2. Характеризация отношений эквивалентности в терминах графов и графиков

E является отношением эквивалентности, если и только ес-

Упражнения.

1) $\mathbb{Z}$ 2) $\mathbb{Q}$ 3) $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q})$ 4) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ 5) $\mathbb{A}$ 6)