Функциональный анализ и его приложения
т. 1, вып. 2, 1967, 74—76.

ОБ ОДНОМ ПРИНЦИПЕ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Б. Н. Садовский

В настоящей заметке вводится понятие уплотняющего оператора и доказывается принцип неподвижной точки, обобщающий принцип Шаудера ([1], см. также [2]) и принцип сжатых отображений [ср. 3].

1. Пусть E — банахово пространство. Для произвольного множества $\Omega \subset E$ мы вводим понятие меры некомпактности.

Определение 1. Обозначим через $Q(\Omega)$ множество всех ε, при которых у множества Ω существует конечная ε-сеть. *Мерой некомпактности* множества Ω называют величину

$$\chi(\Omega) = \inf Q(\Omega).$$

Очевидно, мера некомпактности множества равна нулю тогда и только тогда, когда множество компактно.

Определение 2. Оператор f, действующий из банахова пространства E в банахово пространство E_1, назовем *уплотняющим*, если он непрерывен и для любого ограниченного некомпактного множества $\Omega \subset E$ выполняется неравенство

$$\chi[f(\Omega)] < \chi(\Omega).$$

Например, уплотняющими операторами являются вполне непрерывные операторы, операторы сжатия, а также суммы операторов указанных двух типов.

2. Для уплотняющих операторов мы докажем теорему о неподвижной точке, аналогичную теореме Ю. Шаудера.

Теорема. *Если уплотняющий оператор f переводит выпуклое замкнутое ограниченное множество T банахова пространства E в себя:*

$$f(T) \subseteq T,$$

то он имеет в T хотя бы одну неподвижную точку.

При доказательстве мы воспользуемся двумя леммами.

Лемма 1. *Если $\overline{\mathrm{co}}(\Omega)$ есть замкнутая выпуклая оболочка множества Ω, то*

$$\chi[\overline{\mathrm{co}}(\Omega)] = \chi(\Omega). \qquad (1)$$

Доказательство. Равенство (1) будет, очевидно, доказано, если мы установим справедливость следующего утверждения: *для любого $\varepsilon \in Q(\Omega)$ найдется компактное множество S, являющееся ε-сетью для* $\overline{\mathrm{co}}(\Omega)$. Итак, пусть $\varepsilon \in Q(\Omega)$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ есть ε-сеть множества Ω.

Положим $S = \mathrm{co}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Если $y \in \mathrm{co}(\Omega)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i \qquad (\alpha_i \geqslant 0,\ \Sigma\alpha_i = 1,\ y_i \in \Omega). \qquad (2)$$

Пусть $m(i)$ — функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\| y_i - x_{m(i)} \| \leqslant \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Определим элемент $x \in S$ формулой $x = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i x_{m(i)}$, где коэффициенты α_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ те же, что и в (2). Тогда получим

$$\| y - x \| \leqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \| x_{m(i)} - y_i \| \leqslant \varepsilon.$$

Мы доказали, что компактное множество S является ε-сетью для $\mathrm{co}(\Omega)$; переход к замыканию не представляет труда.

Лемма 2. *В условиях теоремы существует непустое компактное множество $K \subseteq T$, удовлетворяющее соотношению*

$$f(K) = K. \tag{3}$$

Доказательство. Если $x \in T$, то последовательность $\{f^n(x);\, n=0,1,2,\dots\}$ ограничена и переводится оператором f в последовательность $\{f^n(x);\, n=1,2,\dots\}$, мера некомпактности которой равна мере некомпактности исходной последовательности. Отсюда и из определения уплотняющего оператора следует, что последовательность $\{f^n(x)\}$ компактна в E. Обозначим через K множество всех ее предельных точек. Если $y \in K$, то $y = \lim\limits_{k\to\infty} f^{n_k}(x)$. Но тогда $f(y) = \lim\limits_{k\to\infty} f^{n_k+1}(x)$, так что $f(y) \in K$. Наоборот, для данной точки y мы можем найти точку $z \in K$:

$$z = \lim_{k\to\infty} f^{n_k-1}(x),$$

которая удовлетворяет равенству $f(z) = y$. Могло оказаться, что сама последовательность $\{f^{n_k-1}(x)\}$ не сходится; в этом случае мы перешли бы к сходящейся подпоследовательности. Итак, равенство (3) доказано, а из него и из определения уплотняющего оператора вытекает компактность множества K.

Доказательство теоремы. Построим трансфинитную последовательность множеств $\{\Omega_\alpha\}$ по следующим формулам:

$$\Omega_0 = T;$$

$$\Omega_\alpha = \begin{cases} \overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega_{\alpha-1}), & \text{если } \alpha \text{ — порядковое число I рода;} \\ \bigcap\limits_{\beta<\alpha} \Omega_\beta, & \text{если } \alpha \text{ — порядковое число II рода.} \end{cases}$$

Легко проверить по индукции, что для любого α справедливы следующие утверждения:

(а) $\Omega_\alpha \subseteq T$;

(б) Ω_α выпукло и замкнуто;

(в) $f(\Omega_\alpha) \subseteq \Omega_\alpha$;

(г) $K \subseteq \Omega_\alpha$ (K — множество, фигурирующее в лемме 2).

Далее, найдется порядковое число γ (мощность которого не превосходит мощности множества всех подмножеств пространства E), для которого справедливо равенство

$$\Omega_{\gamma+1} = \Omega_\gamma. \tag{4}$$

Согласно (а) — (г) Ω_γ — непустое выпуклое замкнутое ограниченное множество, лежащее в T и инвариантное относительно оператора f. Кроме того, Ω_γ компактно. Действительно, равенство (4) означает, что

$$\Omega_\gamma = \overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega_\gamma).$$

Применяя лемму 1, получаем

$$\chi(\Omega_\gamma) = \chi[f(\Omega_\gamma)],$$

откуда и следует компактность Ω_γ. Для множества Ω_γ выполнены все условия теоремы Шаудера — Тихонова ([4], стр. 493), поэтому непрерывный оператор f имеет в этом множестве (лежащем в T) неподвижную точку. Теорема доказана.

3. Если в определении уплотняющего оператора строгое неравенство заменить нестрогим, то заключение теоремы может оказаться неверным даже в гильбертовом пространстве. Например (этот пример по иному поводу был предложен Е. А. Лифшицом), пусть в единичном шаре пространства l_2 оператор f задан формулой

$$f(x) = (\sqrt{1-\|x\|^2}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots).$$

Непрерывный оператор f переводит единичный шар в единичную сферу. Кроме того, он оставляет меру некомпактности каждого множества неизменной. Действительно, если элементы

$$x_i = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}, \ldots\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{5}$$

образуют ε-сеть множества Ω, то компактное множество S, состоящее из элементов

$$y = \{\xi_0, \xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}, \ldots\} \qquad (\xi_0 \in [0, 1], i = 1, 2, \ldots, r),$$

образует ε-сеть множества $f(\Omega)$. Наоборот, если элементы (5) образуют ε-сеть множества $f(\Omega)$, то конечная ε-сеть для Ω может быть составлена из векторов $y_i = \{\xi_{i2}, \xi_{i3}, \ldots\}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Итак $\chi[f(\Omega)] = \chi(\Omega)$ для любого множества Ω. Тем не менее оператор f не имеет неподвижных точек. В самом деле, всякое решение уравнения $x = f(x)$ должно удовлетворять равенствам $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = \ldots$, Для элемента из l_2 это равносильно равенству $x = \theta$. Но $f(\theta) = (1, 0, 0, \ldots) \neq \theta$.

4. Как стало известно автору, теорема о неподвижной точке для оператора, являющегося суммой сжимающего и вполне непрерывного, была впервые установлена другим методом Р. Л. Фрум-Кетковым (в обобщение результата М. А. Красносельского [3]) для случая телесного множества T.

Автор глубоко благодарен М. А. Красносельскому и участникам Воронежского семинара по функциональному анализу за обсуждение работы и полезные советы.

Воронежский государственный университет

Поступило в редакцию 6 декабря 1966 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 Schauder J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia math. **2** (1930), 171—180.
2. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.
3. Красносельский М. А., Два замечания о методе последовательных приближений, УМН **10**, вып. 1 (1955), 123—127.
4. Данфорд Н. и Шварц Дж., Линейные операторы, М., ИЛ, 1962.