1. Задачи о релейном управлении колебаниями. (А.Н. Гудович).

2. Работы В.А. Ильина по управлению упругими колебаниями. (М.Б. Зверева, 3.10.11).

3. О математических моделях реле с гистерезисом. (Б.Н. Садовский, 12.10.11).

3.1. Неформальное описание реле.

Красносельский – Покровский, с.180.

3.2. Модель неидеального реле по Красносельскому – Покровскому.

Я.З. Цыпкин, Релейные автоматические системы, М., Наука, 1974.

(Нгуен Тхи Хиен, диссертация, с.6).

Красносельский – Покровский, с.182.

3.3. Уравнения с нелинейными дифференциалами, локально явные уравнения.

Прядко И.Н. О локально явных моделях некоторых негладких систем / И.Н. Прядко, Б.Н. Садовский // Автомат. и телемех. – 2004. - №10. – С. 40-50.

Прядко, диссертация, с. 7, 8, 20.

3.4. Локально явная модель реле с гистерезисом.

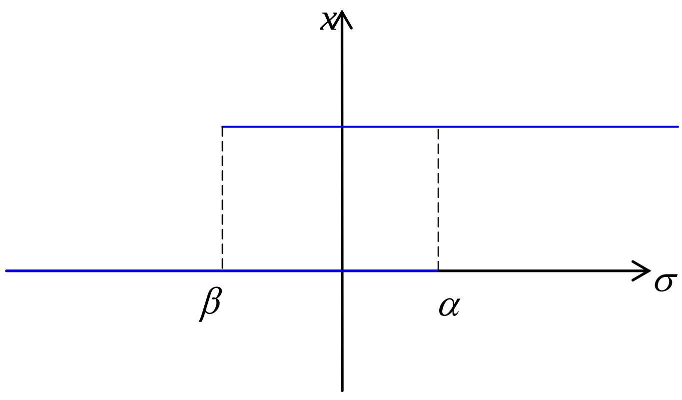
Прядко, диссертация, с. 23.

3.5. Гладкая модель реле с гистерезисом.

Нгуен Тхи Хиен, Б.Н. Садовский, Гладкая модель реле с гистерезисом, Автом. и телемех., 2010, №11, 100-111.
Нгуен Тхи Хиен, диссертация, с. 30-34.

3.6. Краткое резюме (тезисы И.Н. Прядко).

Реле (неидеальное) - это преобразователь с произвольным непрерывным входом $\sigma(t)$ и выходом, имеющим два возможных значения: 0 и 1, - причем при $\sigma(t) \in [\beta, \alpha]$ $(\beta < \alpha)$ возможны оба выходных значения, при $\sigma(t) < \beta$ - только 0, при $\sigma(t) > \alpha$ - только 1.



Нулевой выход скачком меняется на единичный при достижении входным сигналом значения α, единичный на нулевой - при достижении β.

Модель Красносельского - Покровского

$$x(t)=\begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad \sigma(t)\le\beta, \\ 1, \quad \text{если} \quad \sigma(t)\ge\alpha, \\ x_0, \quad \text{если} \quad \sigma(\tau)\in(\beta,\alpha) \ \text{при всех} \ \tau\in[t_0,t], \\ 0, \quad \text{если} \quad \sigma(t)\in(\beta,\alpha) \ \text{и найдется такое} \ t_1\in[t_0,t), \ \text{что} \ \sigma(t_1)=\beta \\ \quad \text{и} \ \sigma(\tau)\in(\beta,\alpha) \ \text{при всех} \ \tau\in[t_1,t], \\ 1, \quad \text{если} \quad \sigma(t)\in(\beta,\alpha) \ \text{и найдется такое} \ t_1\in[t_0,t), \ \text{что} \ \sigma(t_1)=\alpha \\ \quad \text{и} \ \sigma(\tau)\in(\beta,\alpha) \ \text{при всех} \ \tau\in[t_1,t]. \end{cases}$$

Локально явная модель

Уравнение вида

$$x(t+dt)-x(t)=D(t,x,dt)+o(dt) \qquad (1)$$

называется уравнением с нелинейным дифференциалом. Предполагается, что областью определения функции $D(t,x,dt)$ по (t,x) является некоторое множество $U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, а по dt- промежуток $[0,\delta(t,x))$; множество значений лежит в $\mathbb{R}^n$, причем $D(t,x,0)=0$.

Решением уравнения (1) называется непрерывная слева на некотором промежутке I функция $x=\varphi(t)$, удовлетворяющая при любом $t\in\tilde{I}=I\setminus\{\sup I\}$ соотношению:

$$\lim_{dt\to+0}\frac{1}{dt}[\varphi(t+dt)-\varphi(t)-D(t,\varphi(t),dt)]=0.$$

Решение φ называется *сильным*, если для любого $t\in\tilde{I}$ существует такое $\delta>0$, что при $dt\in[0,\delta)$ выполняется равенство:

$$\varphi(t+dt)-\varphi(t)-D(t,\varphi(t),dt)=0.$$

Локально явные уравнения - это класс уравнений с нелинейным дифференциалом, для которых задача Коши с любым допустимым начальным условием имеет сильное решение. Локально явная модель реле имеет вид

$$\Delta x(t) \overset{*}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } \ \sigma(t)=\alpha, \ x(t)=0 \ \text{и} \ dt>0 \\ -1, & \text{если } \ \sigma(t)=\beta, \ x(t)=1 \ \text{и} \ dt>0 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Звездочка над знаком равенства означает, что для любого t это равенство должно выполняться лишь при достаточно малых $dt>0$, причем степень малости может зависеть от t.

Гладкая модель реле.

Гладкое описание реле определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{w}=K[(\sigma-\alpha)_+(1-w)-(\beta-\sigma)_+ w], \\ \tilde{x}=\operatorname{int}(w+0{,}5). \end{cases}$$

Здесь:

$w = w(t)$ – промежуточная (гладкая) выходная функция,

K – большой параметр,

$\sigma=\sigma(t)$ – входная непрерывная функция,

$\tilde{x}=\tilde{x}(t)$ – (дискретная) выходная функция,

y_+ – *положительная часть числа* y, т.е. $\max\{0,y\}$,

$\operatorname{int}(y)$ – *непрерывна слева целая часть числа* y, т.е. наибольшее целое число, меньшее y (в целочисленных точках значение $\operatorname{int}(y)$ на единицу меньше соответствующих значений традиционной функции $[y]$).

4. Примеры математических моделей негладких систем.

4.1. Модели системы с разрывными воздействиями.

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{2}$$

Разрывные воздействия: правая часть системы может быть разрывной по t.

Обобщенное решение в смысле Каратеодори: *абсолютно непрерывная функция*, удовлетворяющая уравнению *почти всюду*.

Интегральная модель:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{3}$$

Модель в виде уравнения с нелинейным дифференциалом (Васильева - Садовский):

$$\Delta x(t) = \int_{t}^{t+dt} f(s, x(t))ds + o(dt). \tag{4}$$

4.2. Модели системы с импульсными воздействиями.

Импульсные воздействия – мгновенные возмущения правой части, при которых неизвестная функция может терпеть разрывы.

Пошаговая модель:

$$t_k < t \le t_{k+1} \Rightarrow \dot{x} = f(t, x), x(t_k + 0) = x(t_k) + j_k \ \ (k = 0,1,...). \tag{5}$$

Модель с использованием δ-функции:

$$\dot{x} = f(t, x) + \sum_k \delta(t - t_k) j_k. \tag{6}$$

Гладкая модель с использованием δ_ε-функции :

$$\begin{gathered} \dot{\tilde{x}} = f(t, \tilde{x}) + \sum_k \delta_\varepsilon(t - t_k) j_k; \\ \delta_\varepsilon \ \textit{непр};\ t \le 0 \vee t \ge \varepsilon \Rightarrow \delta_\varepsilon(t) = 0;\ \int_0^\varepsilon \delta_\varepsilon(s)ds = 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Модель в виде уравнения с нелинейным дифференциалом:

$$\Delta x = f(t, x)dt + \Delta B(t) + o(JB(t) + dt); \tag{8}$$

$B(t)-$непрерывная слева кусочно постоянная функция со скачками j_k в точках t_k.

О задаче А. Злобина и результатах И.Н. Прядко, О. Кривошеевой.

4.3. Модель И. Ньютона движения в центральном силовом поле.

Уравнение движения (современная запись):

$$m\ddot{r} = f(\rho)e_r \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = v, \\ m\dot{v} = f(\rho)e_r \quad (\rho := |r|). \end{cases} \tag{9}$$

Разностный метод решения (явный метод Эйлера):

$$t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_1 + h, ...; \qquad r(t_0) = r_0, v(t_0) = v_0,$$

$$\begin{cases} \tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \tilde{v}_k h, \\ \tilde{v}_{k+1} = \tilde{v}_k + \dfrac{h}{m} f(\tilde{\rho}_k) e_{\tilde{r}_k}. \end{cases} \tag{10}$$

Дискретная модель И. Ньютона:

$$t_k < t \le t_{k+1} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \tilde{r}(t) = \tilde{r}_k + (t - t_k)\tilde{v}_k, \\ \tilde{v}(t) = \tilde{v}_k. \end{cases} \tag{11}$$

И. Ньютон, 1687, с. 94-96.

Запись дискретной модели с использованием δ-функции:

$$m\ddot{\tilde{r}} = \sum_k \delta(t - t_k) h_k e_{\tilde{r}(t_k)}, \;\; h_k = hf\left(\tilde{\rho}(t_k)\right). \tag{12}$$

Запись с использованием δ_ε-функции:

$$m\ddot{\tilde{r}} = \sum_k \delta_\varepsilon(t - t_k) h_k e_{\tilde{r}(t_k)}, \;\; h_k = hf\left(\tilde{\rho}(t_k)\right). \tag{13}$$

Дискретная модель в виде уравнения с нелинейным дифференциалом (задача И. Бондарева).

$$\begin{cases} \dot{\tilde{r}} = \tilde{v}, \\ \Delta\tilde{v} = \Delta B\left(t, r(t)\right) + o\left(dt + JB\left(t, r(t)\right)\right). \end{cases} \tag{14}$$

$$\ddot{x} + mx = 0$$

$$\Delta\dot{x} + \Delta Mx + o\left(dt + JMx\right) = 0$$

4.4. Прядко И.Н. Общее решение линейной системы с негладкими воздействиями.

Рассматривается уравнение (Прядко – Садовский, ДУ,2011):

$$\Delta x(t) = A(t)x(t)dt + \Delta B(t) + o(dt + JB(t)) \tag{15}$$

Здесь $\Delta x(t) = x(t+dt) - x(t)$ – приращение неизвестной функции вещественной переменной *t*, соответствующее приращению аргумента $dt > 0$; $x(t)$ принимает значения в R^n;

$A: I \to \mathrm{M}^n$– известная непрерывная функция, определенная на промежутке I вещественной оси и принимающая значения в пространстве вещественных $n \times n$ -матриц M^n;

$B: I \to R^n$– известная непрерывная слева функция ограниченной вариации;

$\Delta B(t) = B(t + dt) - B(t)$; $JB(t) = \lim\limits_{dt \to +0} \left\| B(t+dt) - B(t) \right\|$.

Решением уравнения (15) назовем непрерывную слева функцию $x: I_x \to \mathrm{R}^n$, определенную на промежутке $I_x \subset I$ и удовлетворяющую в любой точке $t \in I_x \setminus \sup I_x$ соотношению

$$\frac{\Delta x(t) - A(t)x(t)dt - \Delta B(t)}{dt + \left\| B(t+ dt) - B(t) \right\|} \to 0 \quad \textit{при} \quad dt \to +0 \tag{16}$$

Уравнение (15) будем рассматривать вместе с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{17}$$

Если функция $B(t)$ дифференцируема, то уравнение (15) можно записать в виде

$$\dot{x} = A(t)x + \dot{B}(t).$$

Решение последнего уравнения можно найти с помощью формулы вариации произвольной постоянной:

$$x(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\dot{B}(s)ds \right),$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей линейной однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x(t),$$

нормальная в точке t_0.

Поэтому решение уравнения (15) естественно искать в похожем виде.

Доказана следующая **теорема** (обобщенная формула вариации произвольной постоянной):

Функция

$$x(t) \;=\; \Phi(t)\left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)dB(s) \right) \tag{18}$$

является единственным решением задачи (15), (17) *на промежутке* $I \cap [t_0, +\infty)$.

Интеграл в (18) понимается в смысле Римана–Стилтьеса.

4.5. Модели систем с диодными нелинейностями.

См. Л.П. Петрова, Б.Н. Садовский, СДН в работе (конспекты лекций). На сайте – раздел 5.