

<b>1. ЗАДАЧИ О РЕЛЕЙНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ. (А.Н. ГУДОВИЧ).</b> .....	1
<b>2. РАБОТЫ В.А. ИЛЬИНА ПО УПРАВЛЕНИЮ УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ. (М.Б. ЗВЕРЕВА, 3.10.11).</b> ..	1
<b>3. О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ РЕЛЕ С ГИСТЕРЕЗИСОМ. (Б.Н. САДОВСКИЙ, 12.10.11).</b> .....	1
3.1. НЕФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ РЕЛЕ. ....	1
3.2. МОДЕЛЬ НЕИДЕАЛЬНОГО РЕЛЕ ПО КРАСНОСЕЛЬСКОМУ – ПОКРОВСКОМУ. ....	2
3.3. УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ, ЛОКАЛЬНО ЯВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	2
3.4. ЛОКАЛЬНО ЯВНАЯ МОДЕЛЬ РЕЛЕ С ГИСТЕРЕЗИСОМ. ....	2
3.5. ГЛАДКАЯ МОДЕЛЬ РЕЛЕ С ГИСТЕРЕЗИСОМ. ....	2
3.6. <a href="#">EQUATION CHAPTER 1 SECTION 1</a> КРАТКОЕ РЕЗЮМЕ (ТЕЗИСЫ И.Н. ПРЯДКО). ....	2
<b>4. ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕГЛАДКИХ СИСТЕМ.</b> .....	4
4.1. МОДЕЛИ СИСТЕМЫ С РАЗРЫВНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ. ....	4
4.2. МОДЕЛИ СИСТЕМЫ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ. ....	5
4.3. МОДЕЛЬ И. НЬЮТОНА ДВИЖЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ. ....	5
4.4. ПРЯДКО И.Н. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕГЛАДКИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ. ....	6

**1. Задачи о релейном управлении колебаниями. (А.Н. Гудович).**

**2. Работы В.А. Ильина по управлению упругими колебаниями. (М.Б. Зверева, 3.10.11).**

**3. О математических моделях реле с гистерезисом. (Б.Н. Садовский, 12.10.11).**

**3.1. Неформальное описание реле.**

Красносельский – Покровский, с.180.

### 3.2. Модель неидеального реле по Красносельскому – Покровскому.

Я.З. Цыпкин, Релейные автоматические системы, М., Наука, 1974.

(Нгуен Тхи Хиен, диссертация, с.6).

Красносельский – Покровский, с.182.

### 3.3. Уравнения с нелинейными дифференциалами, локально явные уравнения.

Прядко И.Н. О локально явных моделях некоторых негладких систем / И.Н.

Прядко, Б.Н. Садовский // Автомат. и телемех. – 2004. - №10. – С. 40-50.

Прядко, диссертация, с. 7, 8, 20.

### 3.4. Локально явная модель реле с гистерезисом.

Прядко, диссертация, с. 23.

### 3.5. Гладкая модель реле с гистерезисом.

Нгуен Тхи Хиен, Б.Н. Садовский, Гладкая модель реле с гистерезисом, Автом. и телемех., 2010, №11, 100-111.

Нгуен Тхи Хиен, диссертация, с. 30-34.

### 3.6. Краткое резюме (тезисы И.Н. Прядко).

Реле (неидеальное) - это преобразователь с произвольным непрерывным входом

$\sigma(t)$  и выходом, имеющим два

возможных значения: 0 и 1, -

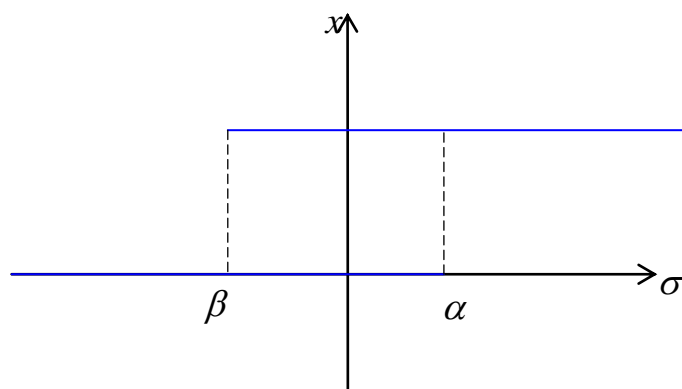
причем при

$\sigma(t) \in [\beta, \alpha]$  ( $\beta < \alpha$ ) возможны

оба выходных значения, при

$\sigma(t) < \beta$  - только 0, при

$\sigma(t) > \alpha$  - только 1.



Нулевой выход скачком меняется на единичный при достижении входным сигналом значения  $\alpha$ , единичный на нулевой - при достижении  $\beta$ .

### Модель Красносельского - Покровского

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma(t) \leq \beta, \\ 1, & \text{если } \sigma(t) \geq \alpha, \\ x_0, & \text{если } \sigma(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ при всех } \tau \in [t_0, t], \\ 0, & \text{если } \sigma(t) \in (\beta, \alpha) \text{ и найдется такое } t_1 \in [t_0, t], \text{ что } \sigma(t_1) = \beta \\ & \text{и } \sigma(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ при всех } \tau \in [t_1, t], \\ 1, & \text{если } \sigma(t) \in (\beta, \alpha) \text{ и найдется такое } t_1 \in [t_0, t], \text{ что } \sigma(t_1) = \alpha \\ & \text{и } \sigma(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ при всех } \tau \in [t_1, t]. \end{cases}$$

### Локально явная модель

Уравнение вида

$$x(t + dt) - x(t) = D(t, x, dt) + o(dt) \quad (1)$$

называется уравнением с нелинейным дифференциалом. Предполагается, что областью определения функции  $D(t, x, dt)$  по  $(t, x)$  является некоторое множество  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , а по  $dt$ - промежутку  $[0, \delta(t, x))$ ; множество значений лежит в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $D(t, x, 0) = 0$ .

Решением уравнения (1) называется непрерывная слева на некотором промежутке  $I$  функция  $x = \varphi(t)$ , удовлетворяющая при любом  $t \in \tilde{I} = I \setminus \{\sup I\}$  соотношению:

$$\lim_{dt \rightarrow +0} \frac{1}{dt} [\varphi(t + dt) - \varphi(t) - D(t, \varphi(t), dt)] = 0.$$

Решение  $\varphi$  называется *сильным*, если для любого  $t \in \tilde{I}$  существует такое  $\delta > 0$ , что при  $dt \in [0, \delta)$  выполняется равенство:

$$\varphi(t + dt) - \varphi(t) - D(t, \varphi(t), dt) = 0.$$

Локально явные уравнения - это класс уравнений с нелинейным дифференциалом, для которых задача Коши с любым допустимым начальным условием имеет сильное решение. Локально явная модель реле имеет вид

$$\Delta x(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(t) = \alpha, x(t) = 0 \text{ и } dt > 0 \\ -1, & \text{если } \sigma(t) = \beta, x(t) = 1 \text{ и } dt > 0 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Звездочка над знаком равенства означает, что для любого  $t$  это равенство должно выполняться лишь при достаточно малых  $dt > 0$ , причем степень малости может зависеть от  $t$ .

### Гладкая модель реле.

Гладкое описание реле определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{w} = K[(\sigma - \alpha)_+(1 - w) - (\beta - \sigma)_+ w], \\ \tilde{x} = \text{int}(w + 0,5). \end{cases}$$

Здесь:

$w = w(t)$  – промежуточная (гладкая) выходная функция,

$K$  – большой параметр,

$\sigma = \sigma(t)$  – входная непрерывная функция,

$\tilde{x} = \tilde{x}(t)$  – (дискретная) выходная функция,

$y_+$  – положительная часть числа  $y$ , т.е.  $\max\{0, y\}$ ,

$\text{int}(y)$  – непрерывна слева целая часть числа  $y$ , т.е. наибольшее целое число, меньшее  $y$  (в целочисленных точках значение  $\text{int}(y)$  на единицу меньше соответствующих значений традиционной функции  $[y]$ ).

## 4. Примеры математических моделей негладких систем.

### 4.1. Модели системы с разрывными воздействиями.

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2)$$

*Разрывные воздействия:* правая часть системы может быть разрывной по  $t$ .

Обобщенное решение в смысле Каратеодори: *абсолютно непрерывная функция*, удовлетворяющая уравнению *почти всюду*.

Интегральная модель:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3)$$

Модель в виде уравнения с нелинейным дифференциалом (Васильева - Садовский):

$$\Delta x(t) = \int_t^{t+dt} f(s, x(t)) ds + o(dt). \quad (4)$$

#### 4.2. Модели системы с импульсными воздействиями.

Импульсные воздействия – мгновенные возмущения правой части, при которых неизвестная функция может терпеть разрывы.

Пошаговая модель:

$$t_k < t \leq t_{k+1} \Rightarrow \dot{x} = f(t, x), x(t_k + 0) = x(t_k) + j_k \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (5)$$

Модель с использованием  $\delta$ -функции:

$$\dot{x} = f(t, x) + \sum_k \delta(t - t_k) j_k. \quad (6)$$

Гладкая модель с использованием  $\delta_\varepsilon$ -функции :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= f(t, \tilde{x}) + \sum_k \delta_\varepsilon(t - t_k) j_k; \\ \delta_\varepsilon \text{ невр}; t \leq 0 \vee t \geq \varepsilon &\Rightarrow \delta_\varepsilon(t) = 0; \int_0^\varepsilon \delta_\varepsilon(s) ds = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Модель в виде уравнения с нелинейным дифференциалом:

$$\Delta x = f(t, x) dt + \Delta B(t) + o(JB(t) + dt); \quad (8)$$

$B(t)$  – непрерывная слева кусочно постоянная функция со скачками  $j_k$  в точках  $t_k$ .

О задаче А. Злобина и результатах И.Н. Прядко, О. Кривошеевой.

#### 4.3. Модель И. Ньютона движения в центральном силовом поле.

Уравнение движения (современная запись):

$$m\ddot{r} = f(\rho)e_r \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = v, \\ m\dot{v} = f(\rho)e_r \quad (\rho := |r|). \end{cases} \quad (9)$$

Разностный метод решения (явный метод Эйлера):

$$t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_1 + h, \dots; \quad r(t_0) = r_0, v(t_0) = v_0, \\ \begin{cases} \tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + \tilde{v}_k h, \\ \tilde{v}_{k+1} = \tilde{v}_k + \frac{h}{m} f(\tilde{\rho}_k) e_{\tilde{r}_k}. \end{cases} \quad (10)$$

Дискретная модель И. Ньютона:

$$t_k < t \leq t_{k+1} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{r}(t) = \tilde{r}_k + (t - t_k) \tilde{v}_k, \\ \tilde{v}(t) = \tilde{v}_k. \end{cases} \quad (11)$$

И. Ньютон, 1687, с. 94-96.

Запись дискретной модели с использованием  $\delta$ -функции:

$$m\ddot{r} = \sum_k \delta(t - t_k) h_k e_{\tilde{r}(t_k)}, \quad h_k = hf(\tilde{\rho}(t_k)). \quad (12)$$

Запись с использованием  $\delta_\varepsilon$ -функции:

$$m\ddot{r} = \sum_k \delta_\varepsilon(t - t_k) h_k e_{\tilde{r}(t_k)}, \quad h_k = hf(\tilde{\rho}(t_k)). \quad (13)$$

Дискретная модель в виде уравнения с нелинейным дифференциалом (задача И. Бондарева).

$$\begin{cases} \dot{\tilde{r}} = \tilde{v}, \\ \Delta\tilde{v} = \Delta B(t, \rho(t)) + o(dt + JB(t, \rho(t))). \end{cases} \quad (14)$$

#### 4.4. Прядко И.Н. Общее решение линейной системы с негладкими воздействиями.

Рассматривается уравнение (Прядко – Садовский, ДУ, 2011):

$$\Delta x(t) = A(t)x(t)dt + \Delta B(t) + o(dt + JB(t)) \quad (15)$$

Здесь  $\Delta x(t) = x(t + dt) - x(t)$  – приращение неизвестной функции вещественной переменной  $t$ , соответствующее приращению аргумента  $dt > 0$ ;  $x(t)$  принимает значения в  $R^n$ ;

$A: I \rightarrow M^n$  – известная непрерывная функция, определенная на промежутке  $I$  вещественной оси и принимающая значения в пространстве вещественных  $n \times n$  - матриц  $M^n$ ;

$B: I \rightarrow R^n$  – известная непрерывная слева функция ограниченной вариации;

$$\Delta B(t) = B(t + dt) - B(t); JB(t) = \lim_{dt \rightarrow +0} \|B(t + dt) - B(t)\|.$$

Решением уравнения (15) назовем непрерывную слева функцию  $x: I_x \rightarrow R^n$ , определенную на промежутке  $I_x \subset I$  и удовлетворяющую в любой точке  $t \in I_x \setminus \sup I_x$  соотношению

$$\frac{\Delta x(t) - A(t)x(t)dt - \Delta B(t)}{dt + \|B(t + dt) - B(t)\|} \rightarrow 0 \quad \text{при } dt \rightarrow +0 \quad (16)$$

Уравнение (15) будем рассматривать вместе с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \quad (17)$$

Если функция  $B(t)$  дифференцируема, то уравнение (15) можно записать в виде

$$\dot{x} = A(t)x + \dot{B}(t).$$

Решение последнего уравнения можно найти с помощью формулы вариации произвольной постоянной:

$$x(t) = \Phi(t) \left( x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \dot{B}(s) ds \right),$$

где  $\Phi(t)$  – фундаментальная матрица соответствующей линейной однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x(t),$$

нормальная в точке  $t_0$ .

Поэтому решение уравнения (15) естественно искать в похожем виде.

Доказана следующая **теорема** (обобщенная формула вариации произвольной постоянной):

*Функция*

$$x(t) = \Phi(t) \left( x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) dB(s) \right) \quad (18)$$

*является единственным решением задачи (15), (17) на промежутке  $I \cap [t_0, +\infty)$ .*

Интеграл в (18) понимается в смысле Римана–Стилтьеса.