ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Прядко Ирина Николаевна

О локально явных уравнениях

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Садовский Б. Н.

ВОРОНЕЖ – 2006

Содержание

Введение

В диссертации рассматривается новый класс уравнений, предназначенных для описания негладких полудетерминированных процессов. Дифференциальным уравнениям, допускающим негладкие решения, посвящена обширная литература.

Прежде всего это литература по теории обобщенных функций, на основе которой изучаются линейные и некоторые нелинейные дифференциальные уравнения с негладкими и, возможно, разрывными решениями ([37], [17], [18], [36], [5]).

Другое направление связано с представлением дифференциальных уравнений в виде интегральных, которые допускают менее гладкие решения ([42], [37], [30], [45], [46]).

Для изучения гистерезисных явлений, которые также приводят к рассмотрению негладких эволюционных процессов, в [10] разработана специальная функционально-аналитическая техника.

Большое количество работ посвящено изучению негладких поведений систем, испытывающих импульсные воздействия ([19], [35], [47], [15], [16]).

Данная диссертация примыкает к направлению, связанному с изучением нового класса уравнений, которые называются *квазидифференциальными*, или *уравнениями с нелинейными дифференциалами* ([23], [25], [43]). В ней вводится и изучается новый класс таких уравнений, которые названы *локально явными*.

Основную идею теории дифференциальных уравнений с нелинейным дифференциалом можно пояснить следующим образом. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение, записанное в нормальной форме:

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1}$$

Его можно переписать "в дифференциалах":

$$dx = f(t, x)dt$$

или, далее, в приращениях:

$$\Delta x = f(t, x)dt + o(dt),$$

где $\Delta x = x(t + dt) - x(t)$. Оказывается, что имеет смысл рассматривать уравнение последнего вида и в том случае, когда первое слагаемое в правой части зависит от dt нелинейно. Запишем его в обозначениях, которые применяются в основном тексте диссертации:

$$u(t + dt) - u(t) = D(t, u(t), dt) + o(dt). \tag{2}$$

Всюду в диссертации предполагается, что переменная dt принимает неотрицательные значения; в связи с этим к решениям предъявляется требование непрерывности слева, поскольку без этого требования решение может иметь произвольные скачки. Такое расширение класса обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет вообще рассматривать эволюционные уравнения в метрических пространствах, не имеющих линейной структуры, поскольку уравнение (2) может быть записано в следующем виде:

$$\lim_{dt \to +0} \frac{\rho(u(t + dt), F(t, u(t), dt))}{dt} = 0.$$

В последнем уравнении $F(t, u(t), dt) = u(t) + D(t, u(t), dt)$, однако отображение F может быть тем или иным способом определено и в пространстве без линейной структуры. Например, первым применением теории квазидифференциальных уравнений было изучение уравнения интегральной воронки, в котором значениями решений являются не элементы пространства $\mathbb{R}^n$, а множества в этом пространстве – сечения интегральной воронки. В этом была исходная мысль теории квазидифференциальных уравнений ([24], [27]).

Другая отличительная черта уравнения (2) заключается в том, что оно позволяет описывать некоторые существенно негладкие процессы в пространствах с линейной структурой. Это свойство уравнения (2) используется и изучается в данной диссертации. Мы не применяем термин "квазидифференциальное"уравнение, поскольку в литературе он имеет различные смысловые значения ([25], [2], [41]), а называем (2) уравнением с нелинейным дифференциалом.

Уравнение (2) может иметь так называемые *сильные* решения, для которых при любом t величина $o(dt)$ при достаточно малых положительных dt равна нулю. Уравнения типа (2), которые при любых допустимых начальных условиях имеют сильные решения, называются в данной работе локально явными. Класс таких уравнений допускает двоякое описание. В диссертации в качестве основного определения локально явного уравнения принято требование, чтобы оно обладало локальным полугрупповым свойством, т.е. соответствующий "квазипоток"

$$\gamma_t^{t+dt} u = u + D(t, u, dt)$$

должен удовлетворять тождеству

$$\gamma_{t_1}^{t_2} \gamma_t^{t_2} u = \gamma_t^{t_2} u$$

для $t_1,\ t_2$, достаточно близких к t (степень близости может зависеть от t) и удовлетворяющих неравенствам $t \le t_1 \le t_2$.

Диссертация состоит из двух глав. В первой главе вводятся основные понятия, связанные с локально явными уравнениями, доказываются теоремы о локальной и глобальной разрешимости задачи Коши и о единственности решения. Рассмотрен ряд примеров моделирования элементов управляющих систем на основе локально явных уравнений. Глава состоит из десяти параграфов.

В первом параграфе описаны общие условия, в которых рассматривается уравнение с нелинейным дифференциалом (2), определенно понятие сильного решения, введены два эквивалентных определения локально явного уравнения: в терминах локального полугруппового свойства квазипотока и в терминах локальной разрешимости задачи Коши в классе сильных решений при любых допустимых начальных условиях. Доказаны утверждения о единственности (вправо) сильного решения задачи Коши, о локальной и глобальной разрешимости задачи Коши, о продолжимости любого решения до непродолжимого. Введена условная запись локально явного уравнения, не содержащая слагаемого $o(dt)$.

В параграфах 1.2–1.6, 1.9 рассматриваются примеры математического моделирования с применением локально явных уравнений. Во втором параграфе строится новая модель неидеального реле. Этот пример показывает, что дифференциальное локально явное уравнение позволяет естественно описывать гистерезисный характер поведения объекта. Традиционные описания неидеальных релейных элементов выражают зависимость выходной функции от предыстории (возможно, далекой) поведения входа и выхода, в то время как локально явные уравнения определяют ближайшую перспективу поведения выходной функции только в зависимости от значений входа и выхода в данный момент. Благодаря этому описания гистерезисных элементов с помощью локально явных уравнений оказываются более компактными. Например, для неидеального реле с пороговыми значениями $\beta < \alpha$ и выходом, принимающим значения 0 и 1, приращение выходной функции, соответствующей достаточно малому ненулевому приращению времени, равно 1, если выход в данный момент равен нулю, а вход верхнему порогу α, -1, если вход равен 1, а выход нижнему порогу β, и 0 во вех остальных случаях –

это есть полное локально явное описание неидеального реле (напомним, что всегда присутствует требование непрерывности решения слева). В новой модели для реле установлен ряд известных свойств, а также некоторые ранее в литературе, по-видимому, не встречавшиеся – например, условие непрерывной зависимости выхода от входа и специальная метрика для описания этой зависимости. В последнем пункте описана модель реле, предназначенная для численного анализа систем релейного управления с помощью стандартной программы Mathematica 5. Входная функция в этой модели предполагается непрерывно дифференцируемой, а сама модель записывается как обыкновенной дифференциальное уравнение с гладкой правой частью.

В параграфах 1.3-1.5 рассматриваются модели в виде локально явных уравнений трех других преобразователей гистерезисного типа, используемых в системах управления: обобщенного реле, упора и люфта. Обобщенное реле отличается от описанного в предыдущем параграфе тем, что выходные значения 0 и 1 заменены непрерывными выходными функциями, которые в точках α и β могут принимать одинаковые значения – в этом случае выходная функция при любом непрерывном входе оказывается непрерывной. Доказано утверждение о глобальной однозначной разрешимости задачи Коши в классе сильных решений. Модель упора, построенная в параграфе четыре, отличается от описанной в [10] тем, что определяется сразу для любых непрерывных, а не только кусочно монотонных входов, в то время как в [10] для рассмотрения произвольных непрерывных входов используется предельный переход от кусочно монотонных входов. Как и в предыдущем параграфе, с помощью общих утверждений о локально явных уравнениях из параграфа 1.1 доказана теорема о глобальной разрешимости и единственности сильного решения задачи Коши. Для упора и рассмотренного в следующем параграфе оператора люфта не совсем очевидной является связь моделей в виде локально явных уравнений с моделями в [10], построенными с помощью предельного перехода. Для решения этого вопроса доказано условие Липшица относительно входной функции для оператора люфта, а через связь между упором и люфтом и для оператора упора.

В шестом параграфе рассмотрена локально явная модель переключателя, который, по-видимому, впервые изучался в работе А.Д.Мышкиса и А.Я. Хохрякова [21]. В диссертации такой тип многопозиционного переключателя назван M-переключателем. Использование теории локально явных уравнений позволило расширить условия, при которых M-переключатель является полудетерминированным преобразователем.

Седьмой параграф посвящен вопросу о единственности вправо решений задачи Коши для локально явных уравнений. В параграфах 1.2-1.5 для построенных моделей изучался вопрос о единственности в классе сильных решений. Однако локально явное уравнение может иметь не только сильные решения. Такая ситуация возможна, например, для обобщенного реле – соответствующий пример приведен в пункте 1.7.1. Условие единственности для обобщенного реле установлено в теореме 1.7.2: оно заключается в том, чтобы функции f и g, входящие в описание обобщенного реле, не касались друг друга. Для уравнения реле, описанного в параграфе 1.2, это условие выполнено автоматически. В пункте 1.7.3 для уравнения M-переключателя доказано, что найденные условия локальной явности этого уравнения гарантируют, что любое решение является сильным. Для получения общих условий единственности (пункт 1.7.5) доказано обобщение известной теоремы ван Кампена [38]. Ее основное условие заключается в том, чтобы зависимость сильных решение от начальных значений удовлетворяла условию Липшица. В пункте 1.7.6 показано, что для уравнений упора и люфта это условие выполняется, и тем самым установлена однозначная разрешимость задачи Коши вправо.

В восьмом параграфе описаны отличные от предложенной в 1.4.2 модели упора. Уравнение, описанное в пункте 1.8.1, имеет более простой вид, однако оно является локально явным и эквивалентно (5), (21) только для кусочно монотонных входов и может не иметь решения для некоторых непрерывных входов. Модель упора в 1.8.5, предложенная в [43], требует непрерывной дифференцируемости входной функции и для таких входов эквивалентна модели 1.4.2.

В параграфе 1.9 рассматривается математическая модель одной системы управления, условно называемой "контроль-коррекция". Система состоит из двух уравнений с нелинейными дифференциалами, одно из которых определяет моменты контроля-коррекции, другое – описывает состояние процесса. Данная система показывает, что решения локально явных уравнений могут быть существенно разрывными.

В параграфе 1.10 проводится сравнение класса локально явных уравнений с "квазидифференциальными уравнениями"в смысле Панасюка. Показано, что класс квазидифференциальных уравнений после некоторого естественного расширения понятия решения охватывает локально явные уравнения. С другой стороны, установлено, что ни один из классов квазидифференциальных уравнений, для которых доказаны теоремы о разрешимости задачи Коши, не содержит в себе целиком класса локально явных уравнений.

Во второй главе диссертации изучаются замкнутые системы, содержащие локально явные уравнения, которые в общем случае можно представить в виде:

$$\Delta v = V(t, v, x_t^{t+dt}, dt) + o(dt), \tag{3}$$

$$\dot{x} = f(t, v, x). \tag{4}$$

Здесь $\dot{x}$, v, x – значения соответствующих функций в момент t, а x_t^{t+dt} – сужение функции x на отрезок $[t, t+dt]$. Соотношение (4) условно называется "уравнением управляемого объекта а v – "управлением". Исследуются вопросы о локальной и глобальной разрешимости и единственности задачи Коши, а также об устойчивости решений таких систем. Глава состоит из пяти параграфов.

В параграфе 2.1 в качестве управления выступает выходной сигнал u реле, для которого входная функция имеет вид $\sigma(t) = p(x(t))$, где p – непрерывная скалярная функция. Допускается, чтобы уравнение управляемого объекта не выполнялось в точках разрыва функции $u(t)$, однако в этих точках $x(t)$ должна сохранять непрерывность. Предполагается, что функция f непрерывна по совокупности переменных (t, x) и по x удовлетворяет одностороннему глобальному условию Липшица с коэффициентом, непрерывно зависящим от t. Теорема, доказанная в пункте 2.1.3, утверждает, что задача Коши в этих условиях однозначно разрешима на всей правой полуоси. В частности, это означает, что точки смены состояния реле могут сгущаться только на бесконечности. Близкие к данной теореме утверждения в различных вариантах в литературе известны. Приведенная теорема демонстрирует возможности применения новой математической модели реле при исследовании систем подобного рода.

Во втором параграфе рассматривается система, в которой присутствуют управляющие элементы двух типов. Первый – это M-переключатель, локально явная модель которого изучена в параграфе 1.6; он имеет разрывный дискретный выход $s(t)$. Второй также описывается локально явным уравнением, но имеет непрерывный выход $u(t)$ – в этой роли могут выступать такие элементы, как упор, люфт, в некоторых случаях обобщенное реле. При исследовании данной системы отдельно рассмотрены вопросы о локальной и глобальной разрешимости задачи Коши. В теореме о локальной однозначной разрешимости на функцию f в уравнении управляемого объекта накладывается несколько более жесткое по сравнению с предыдущем параграфом двустороннее условие Липшица по u и x. При доказательстве глобальной теоремы использовано традиционной условие ограничения роста f по x на бесконечности, которое в предыдущем параграфе следует из глобального условия Липшица. Уравнение M-переключателя не всегда является локально явным, поэтому такие системы имеют свою специфику. В частности, для них возможен вариант непродолжимости решения за некоторую точку τ из-за бесконечного числа переключений до этой точки. В двух последних пунктах описаны конкретные примеры систем, рассмотренных в данном параграфе. Оба примера удовлетворяют условиям глобальной теоремы об однозначной разрешимости, однако в первом случае решение существует на всей правой полуоси, а во втором только на конечном полуинтервале.

В параграфе 2.3 изучен вопрос о локальной разрешимости задачи Коши в ситуации, когда правая часть уравнения управляемого объекта, возможно, ни в какой форме не удовлетворяет условию Липшица по переменной x. В данном случае применение принципа сжимающих отображений, который является основным инструментом в предыдущем параграфе, невозможно, более того, задача Коши может иметь не единственное решение. В рассмотренных условиях вопрос о разрешимости задачи Коши оказалось возможным свести к задаче о неподвижной точке некоторого интегрального оператора, действующего и вполне непрерывного в пространстве непрерывных функций. Для этого оператора найдено выпуклое замкнутое инвариантное множество. Таким образом, существование неподвижной точки вытекает из принципа Шаудера.

В двух заключительных параграфах главы рассматривается задача об устойчивости решений системы, моделирующей некоторый вариант регулятора температуры. Степень устойчивости выделенного решения характеризуется специальной функцией ψ, оценивающей расстояние от произвольного решения до выделенного в зависимости от времени и расстояния в начальный момент, – такая модификация понятия устойчивости вводится и изучается в четвертом параграфе. Она называется в диссертации "*ψ-устойчивостью*"и исследуется также в частном варианте *степенной устойчивости с показателем p*, или *p-устойчивости.* Формальные определения и признаки ψ- и p-устойчивости описываются в параграфе 2.4 для весьма широкого класса "обобщенных динамических систем".

Собственно задаче об устойчивости решений системы, включающей локально явное уравнение, посвящен параграф 2.5. Рассматриваемая система аналогична исследованной в пункте 2.2.5, однако при изучении устойчивости на функции не накладывается условие Липшица, в связи с чем решение задачи Коши может не обладать свойством единственности. При некоторых условиях с использованием результатов предыдущего параграфа установлены признаки ψ- и p-устойчивости выделенного решения такой системы.

1 Основные теоремы о локально явных уравнениях

В этой главе вводятся и обсуждаются новые математические модели некоторых элементов управления в виде так называемых локально явных дифференциальных уравнений с нелинейными дифференциалами. Уравнение с нелинейным дифференциалом (*квазидифференциальное уравнение*, см., например, [23],[43]) имеет вид:

$$u(t+dt) - u(t) = D(t, u(t), dt) + o(dt). \tag{5}$$

Предполагается, что областью определения функции $D(t, u, dt)$ по (t, u) является некоторое множество $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, а по dt – промежуток $[0, \alpha(t, u))$; множество значений лежит в $\mathbb{R}^n$, причем

$$D(t, u, 0) = 0. \tag{6}$$

Решением уравнения (5) будем называть непрерывную слева на некотором промежутке I функцию $u = \varphi(t)$, удовлетворяющую при любом $t \in \widetilde{I} = I \setminus \{\sup I\}$ соотношению:

$$\lim_{dt \to +0} \frac{1}{dt}[\varphi(t+dt) - \varphi(t) - D(t, \varphi(t), dt)] = 0. \tag{7}$$

Решение φ назовем *сильным*, если для любого $t \in \widetilde{I}$ существует такое $\delta > 0$, что при $dt \in [0, \delta)$ выполняется равенство:

$$\varphi(t+dt) - \varphi(t) - D(t, \varphi(t), dt) = 0. \tag{8}$$

В настоящей работе выделяется класс *локально явных уравнений* ([50]), для которых задача Коши всегда разрешима в классе сильных решений. В терминах свойств нелинейного дифференциала D локально явное уравнение может быть определено следующем образом. Рассмотрим *квазипоток* ([34]), порожденный уравнением (5):

$$\gamma_t^{t+dt} u = u + D(t, u, dt). \tag{9}$$

Если эта функция переменной dt непрерывна слева и локально обладает *полугрупповым свойством*, т.е.

$$\begin{gathered}\forall((t_0, u_0) \in U)\exists(\delta > 0)\forall(t_1 : t \leq t_1 < t_0 + \delta)\exists(\delta_1 > 0) \\ \forall(t_2 : t_1 \leq t_2 < t_1 + \delta_1)\ [\gamma_{t_1}^{t_2}\gamma_{t_0}^{t_1}u_0 = \gamma_{t_0}^{t_2}u_0],\end{gathered} \tag{10}$$

то уравнение (5) будем называть *локально явным.* Для любой пары $(t_0, u_0) \in U$ зафиксируем одно из таких δ и будем обозначать его $\Delta = \Delta(t_0, u_0)$.

В параграфе 1.1 рассматривается вопрос ([51]) о существовании и единственности сильного решения локально явного уравнения (5), удовлетворяющего начальному условию:

$$u(t_0) = u_0,\ (t_0, u_0) \in U. \tag{11}$$

В параграфах 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 строятся и исследуются локально явные уравнения для реле, обобщенного реле, одномерного упора, люфта и так называемого M-переключателя ([53]). В параграфе 1.7 изучаются вопросы единственности решения задачи Коши для локально явных уравнений. При этом доказывается и применяется некоторое обобщение теоремы ван Кампена ([38], с.50). В параграфе 1.8 обсуждаются некоторые альтернативные модели упора, одна из которых имеет более простой вид, но в определенном смысле менее удобная для анализа, другая требует непрерывной дифференцируемости входной функции. В параграфе 1.9 рассматривается математическая модель одной системы управления ([54], [55]), которая показывает, что решения локально явных уравнений могут быть существенно разрывными. В параграфе 1.10 проводится сравнение класса локально явных уравнений с квазидифференциальными уравнениями.

1.1 Основные свойства локально явных уравнений

1.1.1 Критерий локальной явности

Для того, чтобы уравнение (5) *было локально явным, необходимо и достаточно, чтобы для любой начальной точки* $(t_0, u_0) \in U$ *задача* (5), (11) *имела сильное решение.*

Доказательство. Пусть выполнено условие локальной явности. Покажем, что функция $\varphi(t) = \gamma_{t_0}^{t} u_0$ является сильным решением задачи (5), (11) на промежутке $[t_0, t_0 + \Delta(t_0, u_0))$. Условие (11) очевидным образом следует из того, что $D(t_0, u_0, 0) = 0$. Пусть $t \in [t_0, t_0 + \Delta(t_0, u_0))$, тогда

$$\varphi(t+dt) - \varphi(t) - D(t, \varphi(t), dt) = \gamma_{t_0}^{t+dt} u_0 - \gamma_{t_0}^{t} u_0 - D(t, \varphi(t), dt) =$$

$$= \gamma_{t_0}^{t+dt} u_0 - \gamma_{t}^{t+dt} \gamma_{t_0}^{t} u_0.$$

В силу (10) при достаточно малых $dt > 0$ последнее выражение равно 0. Следовательно, φ является сильным решением уравнения (5).

Пусть теперь для некоторой точки $(t_0, u_0) \in U$ задача (5), (11) имеет сильное решение φ. Тогда на некотором промежутке $[t_0, t_0 + \delta)$

$$\varphi(t) = \gamma_{t_0}^{t} u_0 = u_0 + D(t_0, u_0, t - t_0).$$

Покажем, что для этой точки с этим δ выполнено (10). Для любого $t_1 \in [t_0, t_0 + \delta)$ выполняется равенство $\varphi(t_2) = \gamma_{t_1}^{t_2} \varphi(t_1) = \gamma_{t_1}^{t_2} \gamma_{t_0}^{t_1} u_0$, если t_2 расположено достаточно близко к t_1: $t_2 \in [t_1, t_1 + \delta_1)$. Поскольку $\varphi(t_2) = \gamma_{t_0}^{t_2} u_0$, это означает, что выполнено (10).

1.1.2 Утверждение о единственности

Класс сильных решений уравнения (5) *обладает свойством единственности вправо, т.е. если* φ *и* ψ *принадлежат этому классу и* $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$, *то* $\psi(t) = \varphi(t)$ *на* $[t_1, +\infty) \bigcap \mathcal{D}(\psi) \bigcap \mathcal{D}(\varphi)$.

Доказательство. Предположим противное: $\psi(t_2) \neq \varphi(t_2)$ $(t_1 < t_2)$. Введем обозначение $t_3 = \inf\{t \in [t_1, t_2] : \psi(t) \neq \varphi(t)\}$. Тогда в силу непрерывности слева $\psi(t_3) = \varphi(t_3)$, следовательно, при малых $dt > 0$

$$\psi(t_3+dt)-\varphi(t_3+dt) = \psi(t_3)+D(t_3, \psi(t_3), dt)-\varphi(t_3)-D(t_3, \varphi(t_3), dt) = 0.$$

Это противоречит определению инфимума.

Заметим, что для не сильных решений утверждение о единственности может оказаться неверным даже для локально явных уравнений. Соответствующий пример будет рассмотрен в пункте 1.7.1.

1.1.3 О записи локально явного уравнения без $o(dt)$ для класса сильных решений

Если в некоторой ситуации интерес представляют только сильные решения, то уравнение (5) можно записать в виде

$$u(t + dt) - u(t) \overset{*}{=} D(t, u(t), dt), \tag{12}$$

где звездочка над знаком равенства означает, что для любого $t \in \mathcal{D}(u) \setminus \sup\{\mathcal{D}(u)\}$ это равенство должно выполняться лишь при достаточно малых $dt > 0$, причем степень малости может зависеть от t.

Таким образом, сильные решения уравнения (5), и только они, являются решениями уравнения (12). Поэтому *локальное полугрупповое свойство* (10) *для квазипотока* $\gamma_t^{t+dt}u = u + D(t, u, dt)$ *дает необходимое и достаточное условие разрешимости вправо уравнения* (12) *при любых начальных данных* $(t_0, u_0) \in U$.

1.1.4 Утверждение о продолжении решения до непродолжимого

Любое решение уравнения (5) *может быть продолжено до непродолжимого.*

Доказательство. Напомним некоторые понятия и факты, относящиеся к теории частично упорядоченных множеств ([3], с.14-17), в применении к упорядоченному по включению семейству множеств. Пусть M – некоторое семейство множеств. Множество $\widetilde{m} \in M$ называется *максимальным* (в M), если не существует такого $m_1 \in M$, что $\widetilde{m} \subset m_1$ и $\tilde{m} \neq m_1$. $L \subset M$ называется *линейно упорядоченным*, если для любых $l_1, l_2 \in L$ справедливо соотношение $l_1 \subset l_2$ или $l_2 \subset l_1$. Множество $m \in M$ называется *мажорантой* множества $L \subset M$, если $l \subset m$ для любого $l \in L$. Из леммы Цорна вытекает, что если любое линейно упорядоченное подмножество множества M имеет мажаранту, то M имеет хотя бы одно максимальное множество.

Пусть F – семейство всех решений уравнения (5), которые являются продолжениями фиксированного решения $\overline{\varphi}$. Обозначим через M множество их графиков. Проверим выполнение леммы Цорна. Рассмотрим линейно упорядоченное подмножество L множества M. Положим $m = \bigcup\limits_{l \in L} l$. Очевидно, $l \subset m$ для любого $l \in L$. Покажем, что $m \in M$. Так как L линейно упорядоченно, то m является графиком некоторой однозначной функции φ, которая, очевидно, является продолжением $\overline{\varphi}$. Покажем, что φ является решением уравнения (5). Действительно, пусть $\tau \in \mathcal{D}(\varphi)$, тогда по определению m найдется ψ – решение (5), такое, что $\varphi(t) = \psi(t)$ при $t \in \mathcal{D}(\psi)$. При этом если $\tau \neq \inf \mathcal{D}(\varphi)$, то ψ можно выбрать так, что $\tau \neq \inf \mathcal{D}(\psi)$; поэтому функция φ вместе с ψ непрерывна слева в точке τ. Если же $\tau \neq \sup \mathcal{D}(\varphi)$, то ψ можно выбрать так, что $\tau \neq \sup \mathcal{D}(\psi)$; поэтому функция φ вместе с ψ удовлетворяет соотношению (5) в точке $t = \tau$. Таким образом, $m \in M$.

Следовательно, в M есть максимальный элемент, т.е. график непродолжимого решения.

1.1.5 Утверждение о глобальной разрешимости

Пусть уравнение (5) *является локально явным;* $T \in (t_0, +\infty]$. *Тогда если для любого* $t_1 \in (t_0, T)$ *и любого решения* φ *задачи* (5),(11), *определенного на* $[t_0, t_1)$, *существует* $\lim\limits_{t \to t_1 - 0} \varphi(t) = u_1$ *и* $(t_1, u_1) \in U$, *то каждое решение задачи* (5),(11) *может быть продолжено на* $[t_0, T)$.

Заметим, что *если в условиях этого утверждения требовать существование предела только для сильных решений, то для таких решений заключение остается верным.*

Доказательство. Так как любое решение уравнения (5) можно продолжить до непродолжимого, будем рассматривать только непродолжимые решения. Пусть φ – такое решение задачи (5), (11) и $\sup \mathcal{D}(\varphi) = t_1 < T$. Если $\mathcal{D}(\varphi) = [t_0, t_1)$, то непрерывная слева функция

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{при } t \in [t_0, t_1), \\ u_1 & \text{при } t = t_1 \end{cases}$$

является нетривиальным продолжением решения φ. Если $\mathcal{D}(\varphi) = [t_0, t_1]$, то рассмотрим решение ψ уравнения (5), удовлетворяющее условию $u(t_1) = u_1$, которое по критерию локальной явности существует на некотором промежутке $[t_1, t_1 + \Delta)$. Тогда функция

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{при} \quad t \in [t_0, t_1), \\ \psi(t) & \text{при} \quad t \in [t_1, t_1 + \Delta) \end{cases}$$

является нетривиальным продолжением решения φ. В обоих случаях получим противоречие с допущением о непродолжимости φ. Следовательно, $\sup \mathcal{D}(\varphi) \geq T$.

Замечание о продолжимости сильных решений вытекает из того, что локальная разрешимость вправо задачи Коши доказана именно в классе сильных решений.

1.2 Уравнение реле

1.2.1 Феноменологическое описание реле с гистерезисом

Будем рассматривать реле как преобразователь с произвольным непрерывным входом $\sigma(t)$ и выходом, имеющим два возможных значения: 0 и 1, – причем при $\sigma(t) \in [\beta, \alpha]$ $(\beta < \alpha)$ возможны оба выходных значения, при $\sigma(t) < \beta$ – только 0, при $\sigma(t) > \alpha$ – только 1.

Нулевой выход скачком меняется на единичный при достижении входным сигналом значения α, единичный на нулевой – при достижении β. Различные описания реле рассматривались многими авторами – см., например, [10], [9], [7]. Приведем (в сравнимых обозначениях) "явную формулу используемую в [10] (с. 182):

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sigma(t) \le \beta, \\ 1, & \text{если} \quad \sigma(t) \ge \alpha, \\ u_0 & \text{если} \quad \sigma(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ при всех } \tau \in [t_0, t], \\ 0, & \text{если} \quad \sigma(t) \in (\beta, \alpha) \text{ и найдется такое } t_1 \in [t_0, t), \\ & \qquad \text{что } \sigma(t_1) = \beta \text{ и } \sigma(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ при всех } \tau \in (t_1, t], \\ 1, & \text{если} \quad \sigma(t) \in (\beta, \alpha) \text{ и найдется такое } t_1 \in [t_0, t), \\ & \qquad \text{что } \sigma(t_1) = \alpha \text{ и } \sigma(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ при всех } \tau \in (t_1, t]. \end{cases} \tag{13}$$

1.2.2 Модель реле в виде локально явного уравнения

В соответствии с приведенным феноменологическим описанием приращение выходного сигнала реле можно локально, т.е. при малых $dt \ge 0$, выразить формулой:

$$D(t, u, dt) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sigma(t) = \alpha, \; u = 0 \text{ и } dt > 0, \\ -1, & \text{если} \quad \sigma(t) = \beta, \; u = 1 \text{ и } dt > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{14}$$

Поэтому глобально зависимость выходного сигнала от входного описывается сильными решениями уравнения (5), (14), в котором $(t,u) \in U \Leftrightarrow [(\sigma(t) \le \alpha,\ u = 0)$ *или* $(\sigma(t) \ge \beta,\ u = 1)]$.

Эта модель отличается от описанной в предыдущем пункте тем, что выходы непрерывны слева, а не справа; условие непрерывности слева существенно в определении решения локально явного уравнения. Однако при этом сохраняются основные свойства реле, отмеченные в [10] (см. 1.2.5, 1.2.6).

1.2.3 Теорема существования и единственности для уравнения реле

При любом непрерывном на $[t_0, T)$ $(T \le \infty)$ *входе* $\sigma(t)$ *существует единственное определенное на этом промежутке сильное решение уравнения* (5), (14), *удовлетворяющее условию* (11); *любое решение этого уравнения является сильным.*

Эта теорема в более общем виде доказывается ниже в пункте 1.3.2.

1.2.4 О характере локальной зависимости решения от входа

Поскольку правая часть в (14) не зависит от dt при $dt > 0$, справедливо следующее замечание. *Пусть* $\sigma(t_0) = \widetilde{\sigma}(t_0) = \sigma_0$ *и* $u(t_0) = \widetilde{u}(t_0) = u_0$, *тогда* $\exists(\delta > 0)\ \forall(t \in (t_0, t_0+\delta))\ [u(t) = \widetilde{u}(t)]$.

Доказательство. Действительно, пусть, для определенности, $u(t_0) = 0$, тогда $\sigma(t_0) \le \alpha$. Рассмотрим возможные случаи. Если $\sigma(t_0) < \alpha$, то в силу непрерывности функций σ, $\widetilde{\sigma}$ в некоторой правой δ-окрестности точки t_0 $\sigma(t) < \alpha$ и $\widetilde{\sigma}(t) < \alpha$. Следовательно, при $t \in (t_0, t_0+\delta)$ $\ u(t) = \widetilde{u}(t) = 0$.

Если $\sigma(t_0) = \alpha$, то $\sigma(t) > \beta$ и $\widetilde{\sigma}(t) > \beta$ в некоторой правой δ-окрестности точки t_0. Следовательно, при $t \in (t_0, t_0+\delta)$ $\ u(t) = \widetilde{u}(t) = 1$.

Для случая $u(t_0) = 1$ доказательство проводится аналогично.

Это утверждение позволяет ввести следующее обозначение:
$v(\sigma(t_0), u(t_0))$ – константа 0 или 1, которой равен выходной сигнал $u(t)$ на некотором интервале $(t_0, t_0 + \delta)$; величина $\delta > 0$ зависит от поведения $\sigma(t)$ при $t > t_0$.

1.2.5 Монотонность по входам

Пусть $\sigma, \widetilde{\sigma}$ – непрерывные входы, такие, что $\sigma(t) \le \widetilde{\sigma}(t)$ при $t \ge t_0$, $u, \widetilde{u}$ – соответствующие им выходы, причем $u(t_0) \le \widetilde{u}(t_0)$.

Тогда $u(t) \le \widetilde{u}(t)$ $(t \ge t_0)$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $t_1 = \inf\{t \ge t_0 : u(t) > \widetilde{u}(t)\}$. Тогда $u(t) = v(\sigma(t_1), u(t_1)) > \widetilde{u}(t) = \widetilde{v}(\widetilde{\sigma}(t_1), \widetilde{u}(t_1))$ на некотором интервале $(t_1, t_1 + \delta)$ см. 1.2.4, т.е. $u(t) = u(t_1) + D(t_1, u(t_1), t - t_1) = 1$, $\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}(t_1) + \widetilde{D}(t_1, \widetilde{u}(t_1), t - t_1) = 0$. Это возможно в двух случаях.

В первом случае $u(t_1) = 1$, тогда $\sigma(t_1) > \beta$, следовательно, $\widetilde{\sigma}(t_1) > \beta$. Ввиду непрерывности слева $u(t_1) \le \widetilde{u}(t_1)$, поэтому $\widetilde{u}(t_1) = 1$. И так как $\widetilde{\sigma}(t_1) > \beta$, то $\widetilde{D}(t_1, \widetilde{u}(t_1), t_1 - dt) = 0$. Таким образом, $\widetilde{u}(t) = 1 \ne 0$.

Во втором случае, $u(t_1) = 0$, $D(t_1, u(t_1), t_1 - dt) = 1$. Это означает, что $\sigma(t_1) = \alpha$, следовательно, $\widetilde{\sigma}(t_1) \ge \alpha$. Если $\widetilde{\sigma}(t_1) > \alpha$, то $\widetilde{u}(t_1) = 1$ и $\widetilde{u}(t) = 1$. Если $\widetilde{\sigma}(t_1) = \alpha$, то, независимо от $\widetilde{u}(t_1)$, $\widetilde{u}(t_1) + \widetilde{D}(t_1, \widetilde{u}(t_1), t_1 - dt) = 1$. Утверждение доказано.

1.2.6 Монотонность по пороговым значениям

Если пороговые значения двух реле связаны соотношениями $\alpha_1 \le \alpha_2$, $\beta_1 \le \beta_2$, то при одинаковых входных функциях и начальных значениях выходы связаны неравенством $u_1(t) \ge u_2(t)$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $t_1 = \inf\{t \ge t_0 :$

$u_1(t) < u_2(t)\}$. Тогда $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = 1$ на некотором интервале $(t_1, t_1 + \delta)$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $u_1(t_1) = 0$, то $\sigma(t_1) < \alpha_1 < \alpha_2$. Ввиду непрерывности слева $u_1(t_1) \geq u_2(t_1)$, поэтому $u_2(t_1) = 0$. И так как $\sigma(t_1) < \alpha_2$, то $u_2(t) = 0 \neq 1$.

Если $u_1(t_1) = 1$, то $D_1(t_1, u(t_1), t - t_1) = -1$ и $\sigma(t_1) = \beta_1 \leq \beta_2$. При этом если $u_2(t_1) = 0$, то $\sigma(t_1) = \alpha_2 \nleq \beta_2$, так как $u_2(t) = 1$. Если же $u_2(t_1) = 1$, то $\sigma(t_1) > \beta_2$, так как $u_2(t) = 1$. Утверждение доказано.

1.2.7 Непрерывная зависимость выхода от входа

Предположим, что непрерывная на $[t_0, T]$ функция σ в точках локального максимума не принимает значение α, а в точках локального минимума – β.

Тогда малым возмущениям σ в норме пространства $C_{[t_0,T]}$ соответствуют при одинаковых начальных значениях u_0 малые отклонения выходной функции u в интегральной норме L_1, т.е.:

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(\widetilde{\sigma} : \|\widetilde{\sigma} - \sigma\| < \delta)[\|\widetilde{u} - u\|_1 < \varepsilon]. \qquad (15)$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $u_0 = 0$, тогда $\sigma(t_0) \leq \alpha$.

В случае, если $\sigma(t) < \alpha$ при $t \in [t_0, T]$, положим $\delta = \alpha - \max\limits_{t_0 \leq s \leq T} \sigma(s)$. Тогда, если $\|\widetilde{\sigma} - \sigma\| < \delta$, то $\widetilde{\sigma}(t) < \alpha$ при $t \in [t_0, T]$. Следовательно, $\widetilde{u}(t) = u(t) = 0$ при $t \in [t_0, T]$ и $\|\widetilde{u} - u\|_1 = 0$.

В противном случае введем обозначения: $\tau_1 = \inf\{t \in [t_0, T] : \sigma(t) = \alpha\}$, $\tau_2 = \inf\{t \in [\tau_1, T] : \sigma(t) = \beta\}$ и т.д. Так как функция σ непрерывна, число k таких точек конечно. Отметим, что $\tau_k \neq T$, поскольку в противном случае, если $\sigma(T) = \alpha$, то T – точка локального максимума, если $\sigma(T) = \beta$, то T – точка локального минимума, что противоречит условиям теоремы. Рассмотрим отрезки $[\tau_i - \frac{\varepsilon}{3k}, \tau_i + \frac{\varepsilon}{3k}]$ $(1 \leq i \leq k)$. При необходимости уменьшим ε так, чтобы все эти отрезки (за исключением первого в случае $\tau_1 = t_0$) содержались в отрезке $[t_0, T]$ и не пересекались.

Положим $\delta_{11} = \max\limits_{s\in[\tau_1,\tau_1+\frac{\varepsilon}{3k}]} \sigma(s) - \alpha$, ($\delta_{11} > 0$, так как τ_1 не является точкой локального максимума и $\sigma(t) \leq \alpha$ при $t \leq \tau_1$) и $\delta_{12} = \alpha - \max\limits_{s\in[t_0,\tau_1-\frac{\varepsilon}{3k}]} \sigma(s)$, если $\tau_1 \neq t_0$. Введем обозначение $\delta_1 = \min\{\delta_{11}, \delta_{12}\}$, если $\tau_1 \neq t_0$; $\delta_1 = \delta_{11}$ в противном случае.

Аналогично, положим $\delta_{21} = \beta - \min\limits_{s\in[\tau_2,\tau_2+\frac{\varepsilon}{3k}]} \sigma(s)$, ($\delta_{21} > 0$, так как τ_2 не является точкой локального минимума), $\delta_{22} = \max\limits_{s\in[\tau_1+\frac{\varepsilon}{3k},\tau_2-\frac{\varepsilon}{3k}]} \sigma(s) - \beta$; $\delta_2 = \min\{\delta_{21}, \delta_{22}\}$ и т.д. Положим $\delta_{k+1} = \max\limits_{s\in[\tau_k+\frac{\varepsilon}{3k},T]} \sigma(s) - \beta$, если $\sigma(\tau_k) = \alpha$ и $\delta_{k+1} = \alpha - \max\limits_{s\in[\tau_k+\frac{\varepsilon}{3k},T]} \sigma(s)$, если $\sigma(\tau_k) = \beta$.

Пусть $\delta = \min\limits_{1\leq i\leq k+1} \delta_i$. Тогда, если $\|\sigma - \widetilde{\sigma}\| < \delta$ и $\tau_1 \neq t_0$, то $\widetilde{\sigma}(t) < \alpha$ при $t \in [t_0, \tau_1 - \frac{\varepsilon}{3k}]$ и $\widetilde{\sigma}(t) > \alpha$ в некоторой точке из промежутка $(\tau_1 - \frac{\varepsilon}{3k}, \tau_1 + \frac{\varepsilon}{3k}]$. Далее $\widetilde{\sigma}(t) > \beta$ при $t \in [\tau_1 + \frac{\varepsilon}{3k}, \tau_2 - \frac{\varepsilon}{3k}]$ и найдется такая точка $t_2 \in (\tau_2 - \frac{\varepsilon}{3k}, \tau_2 + \frac{\varepsilon}{3k})$, что $\widetilde{\sigma}(t_2) > \beta$ и т.д. Следовательно, вне отрезков $[\tau_i - \frac{\varepsilon}{3k}, \tau_i + \frac{\varepsilon}{3k}]$ $(1 \leq i \leq k)$ выходы u, $\widetilde{u}$ совпадают.

Положим $\widetilde{\tau}_1 = \max\{t_0, \tau_1 - \frac{\varepsilon}{3k}\}$. Тогда

$$\|u - \widetilde{u}\|_1 = \int_{t_0}^{\widetilde{\tau}_1} |u(t) - \widetilde{u}(t)|dt + \int_{\widetilde{\tau}_1}^{\tau_1+\frac{\varepsilon}{3k}} |u(t) - \widetilde{u}(t)|dt$$

$$+ \int_{\tau_1+\frac{\varepsilon}{3k}}^{\tau_2-\frac{\varepsilon}{3k}} |u(t) - \widetilde{u}(t)|dt + ... + \int_{\tau_k+\frac{\varepsilon}{3k}}^{T} |u(t) - \widetilde{u}(t)|dt \leq k \cdot \frac{2\varepsilon}{3k} < \varepsilon.$$

Утверждение доказано.

1.2.8 Определение метрики в пространстве функций

Для элементов типа реле близость выходных функций удобно характеризовать также с помощью специальной метрики ρ_G, которую определим как расстояние по Хаусдорфу между графиками функций. Именно, для любых двух вещественных функций f и g вещественного аргумента положим

$$\rho_G = \inf\{\varepsilon > 0 : (\Gamma_f + B_\varepsilon \supset \Gamma_g) \wedge (\Gamma_g + B_\varepsilon \supset \Gamma_f)\}, \qquad (16)$$

где B_ε – круг с центром в нуле радиуса ε.

Строго говоря, функция ρ_G на множестве функций является не метрикой, а полуметрикой: хаусдорфово расстояние между множествами равно расстоянию между их замыканиями, а разные функции могут иметь одинаковые замыкания графиков.

Метрика ρ_G отличается от интегральной метрики и sup-метрики, прежде всего, тем, что области определения рассматриваемых функций могут и не совпадать. Кроме того, для функций, имеющих одинаковую область определения, метрика ρ_G может не совпадать ни с одной из указанных метрик.

Рассмотрим, например, два выхода реле $u, \widetilde{u}$ с пороговыми значениями $-2, 2$, соответствующие начальным значениям $u(0) = \widetilde{u}(0) = 0$ и входам $2\sin t$ и $2\sin(t+\frac{\pi}{10})$, определенным на промежутке $[0, 2\pi]$. Тогда $\|u-\widetilde{u}\|_{\sup} = 1$, $\|u-\widetilde{u}\|_{L_1} = \frac{\pi}{5}$, $\rho_G(u, \widetilde{u}) = \frac{\pi}{10}$.

Нетрудно видеть, что любых функций $u, \widetilde{u}$ справедливо неравенство:

$$\rho_G(u, \widetilde{u}) \leq \|u-\widetilde{u}\|_{\sup};$$

обратное неравенство не справедливо ни с какой константой, существуют функции, для которых $\|u-\widetilde{u}\|_{\sup}$ сколь угодно велико, а $\rho_G(u, \widetilde{u})$ мало. Например, для функций $u(t) = \frac{1}{t}$, $\widetilde{u}(t) = \frac{1}{t-1}$, определенных на отрезке $[1+\varepsilon, 2]$, $\|u-\widetilde{u}\|_{\sup} = \frac{1}{(1+\varepsilon)\varepsilon}$. В зависимости от ε эта величина может быть сколь угодно большой, тогда как $\rho_G(u, \widetilde{u}) = 1$ независимо от ε.

Интегральная метрика и метрика ρ_G не сравнимы между собой. Так, в примере, рассмотренном выше, расстояние $\|u-\widetilde{u}\|_{L_1} = \ln\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$ также может быть сколь угодно большим за счет выбора ε, тогда как $\rho_G(u, \widetilde{u}) = 1$. С другой стороны, если $u(t) = 0$ при $t \in [0, 1-\frac{1}{M})$ и $u(t) = M$ при $t \in [1-\frac{1}{M}, 1]$, а $\widetilde{u}(t) = 0$ при $t \in [0, 1]$, то $\|u-\widetilde{u}\|_{L_1} = 1$, в то время как $\rho_G(u, \widetilde{u}) = M$ может быть сколь угодно велико.

1.2.9 О близости выходов в метрике Хаусдорфа

В условиях пункта 1.2.7 *можно утверждать, что соответствие между входной и выходной функциями реле непрерывно, если для входной функции, как и выше, рассматривать метрику пространства* C, *а для выходной – метрику* ρ_G.

Доказательство аналогично приведенному в пункте 1.2.7 с той разницей, что здесь достаточно рассмотреть отрезки вида $[\tau_i - \frac{\varepsilon}{2}, \tau_i + \frac{\varepsilon}{2}]$.

1.2.10 Приближенная модель реле в виде дифференциального уравнения

Для численного анализа систем, включающих реле, с помощью современных пакетов прикладных математических программ (в настоящей работе применялся пакет Mathematica 5) целесообразно использовать описание реле с помощью дифференциального уравнения, для решения которого в этих программах имеются достаточно сильные средства. В качестве такой модели предлагается следующая задача Коши:

$$\begin{gathered}\dot{y} = \tfrac{1}{\pi}[(1-y)\cdot|\tfrac{d}{dt}(\mathrm{arctg}(M(\sigma(t)-\alpha)))|- \\ -y\cdot|\tfrac{d}{dt}(\mathrm{arctg}(M(\sigma(t)-\beta)))|], \\ y(t_0) = y_0 \in \{0,1\},\end{gathered} \tag{17}$$

здесь M – большой параметр, при выборе которого учитываются два фактора: во-первых, при увеличении M увеличивается точность предлагаемой модели, но, во-вторых, увеличение M приводит к тому, что стандартные программы решения дифференциальных уравнений должны значительно уменьшать шаг по времени и, следовательно, увеличивать время анализа.

Входящие в уравнение производные от арктангенса имеют в подробной записи следующий вид:

$$\frac{M\dot{\sigma}(t)}{1+M^2(\sigma(t)-\alpha)^2}, \tag{18}$$

$$\frac{M\dot{\sigma}(t)}{1+M^2(\sigma(t)-\beta)^2}. \tag{19}$$

Выражение (18) при больших M существенно отлично от нуля только вблизи α. Поэтому первое слагаемое в задаче (17) играет роль, только когда σ близко к α, а y к нулю. Аналогично, второе слагаемое играет роль, только когда σ близко к β, а y к 1.

На рисунке изображены результаты эксперимента, проведенного с помощью этой модели. Входная функция задана формулой $\sigma(t) = |2\sin(t) - 1,5| - 1$, пороговые значения $\beta = -1$, $\alpha = 1,5$.

1.3 Обобщенное реле

1.3.1 Математическая модель обобщенного реле

Пусть $\beta < \alpha$; $f : (-\infty, \alpha] \to \mathbb{R}$, $g : [\beta, +\infty) \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции и $f(x) \neq g(x)$ при $x \in (\beta, \alpha)$. Рассмотрим уравнение (5) с нелинейным дифференциалом следующего вида:

$$D(t,u,dt) = \begin{cases} f[\sigma(t+dt)] - f[\sigma(t)], & \text{если } \sigma(t) < \alpha,\ u = f[\sigma(t)] \text{ и } dt > 0, \\ g[\sigma(t+dt)] - f[\sigma(t)], & \text{если } \sigma(t) = \alpha,\ u = f[\sigma(t)] \text{ и } dt > 0, \\ g[\sigma(t+dt)] - g[\sigma(t)], & \text{если } \sigma(t) > \beta,\ u = g[\sigma(t)] \text{ и } dt > 0, \\ f[\sigma(t+dt)] - g[\sigma(t)], & \text{если } \sigma(t) = \beta,\ u = g[\sigma(t)] \text{ и } dt > 0, \\ 0, & \text{если } dt = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Предполагается, что $(t,u) \in U \Leftrightarrow [(\sigma(t) \le \alpha,\ u = f[\sigma(t)])$ *или* $(\sigma(t) \ge \beta,\ u = g[\sigma(t)])]$. Поведениями обобщенного реле назовем сильные решения этого уравнения.

Функция (14) получается из (20) при $f(x) \equiv 0,\ g(x) \equiv 1$.

1.3.2 Существование и единственность решения

При любом непрерывном на $[t_0, T)$ $(T \le \infty)$ *входе* $\sigma(t)$ *существует единственное определенное на этом промежутке сильное решение уравнения* (5), (20), *удовлетворяющее условию* (11).

Доказательство. Покажем, что уравнение обобщенного реле является локально явным. Функция $D(t,u,dt)$ непрерывна слева по dt на $(0, T-t)$ как композиция непрерывных функций. Если $u = f[\sigma(t)]$, то либо $\sigma(t) < \alpha$, либо $\sigma(t) = \alpha$. В первом случае $\gamma_t^{t+dt}u = f[\sigma(t+dt)]$. Положим $\Delta = T - t$, если $\sigma(\tau) < \alpha$ при $\tau \in [t,T)$, и $\Delta = \min\{\tau \in [t,T) : \sigma(\tau) = \alpha\} - t$ в противном случае. Очевидно, $\Delta > 0$. Пусть $t \le t_1 \le t_2 < t + \Delta$. Тогда $\sigma(t_1) < \alpha$ и, следовательно, $\gamma_{t_1}^{t_2}\gamma_t^{t_1}u = \gamma_{t_1}^{t_2} f[\sigma(t_1)] = f[\sigma(t_2)] = \gamma_t^{t_2}u$. В качестве δ_1 из определения локально явного уравнения здесь выступает величина $t + \Delta - t_1$.

Во втором случае $\gamma_t^{t+dt}u = g[\sigma(t+dt)]$ при $dt > 0$. Положим $\Delta = T - t$, если $\sigma(\tau) > \beta$ при $\tau \in [t,T)$, и $\Delta = \min\{\tau \in [t,T) : \sigma(\tau) = \beta\} - t$ в противном случае. Пусть $t \le t_1 \le t_2 < t + \Delta$. Тогда $\sigma(t_1) > \beta$ и, следовательно, $\gamma_{t_1}^{t_2}\gamma_t^{t_1}u = \gamma_{t_1}^{t_2} g[\sigma(t_1)] = g[\sigma(t_1)] + g[\sigma(t_2)] - g[\sigma(t_1)] = \gamma_t^{t_2}u$.

Если $u = g[\sigma(t)]$, то доказательство аналогично.

Проверим, что выполнены условия утверждения о глобальной разрешимости, т.е. что для любого $t_1 \in (t_0, T)$ и любого решения φ существует предел $\lim\limits_{t \to t_1 - 0} \varphi(t) = u_1$, причем $(t_1, u_1) \in U$. Если $f[\sigma(t_1)] = g[\sigma(t_1)]$, то, так как $\varphi(t)$ может равняться только $f[\sigma(t)]$ или $g[\sigma(t)]$, предел, очевидно, существует и $(t_1, u_1) \in U$. Рассмотрим случай, когда $f[\sigma(t_1)] \neq g[\sigma(t_1)]$. Так как функции f и g непрерывны, то $f[\sigma(t)] \neq g[\sigma(t)]$ при $t \in (t_1 - \delta_1, t_1]$. Очевидно, $\sigma(t_1) \neq \alpha$ или $\sigma(t_1) \neq \beta$. Пусть, для определенности, $\sigma(t_1) \neq \beta$. Тогда, в силу непрерывности σ, найдется $\delta_2 > 0$, такое, что $\sigma(t) \neq \beta$ при $t \in (t_1 - \delta_2, t_1]$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Для доказательства существования предела покажем, что любое решение уравнения обобщенного реле, определенное на $[t_0, t_1)$, вблизи точки t_1 тождественно равняется $f[\sigma(t)]$ или $g[\sigma(t)]$. Предположим противное; тогда для решения φ уравнения реле существуют точки t_2, t_3, такие, что $t_1 - \delta < t_2 < t_3 < t_1$, $\varphi(t_2) = g[\sigma(t_2)]$, $\varphi(t_3) = f[\sigma(t_3)]$. Обозначим $t_4 = \inf\{t \in [t_2, t_3] : \varphi(t) = f[\sigma(t)]\}$; в силу непрерывности φ слева $\varphi(t_4) = g[\sigma(t_4)]$. Следовательно, существует сходящаяся к нулю последовательность положительных dt_k, для которых $\varphi(t_4 + dt_k) - \varphi(t_4) = f[\sigma(t_4 + dt_k)] - g[\sigma(t_4)] = D(t_4, g[\sigma(t_4)], dt_k) + o(dt_k)$, но $D(t_4, g[\sigma(t_4)], dt_k) = g[\sigma(t_4 + dt_k)] - g[\sigma(t_4)]$, так как $\sigma(t_4) \neq \beta$. Переходя к пределу, получим $g[\sigma(t_4)] = f[\sigma(t_4)]$, что невозможно. Итак, рассматриваемый предел существует и равен $g[\sigma(t_1)]$ или $f[\sigma(t_1)]$, так что $(t_1, u_1) \in U$. Воспользовавшись утверждениями 1.1.1, 1.1.2 и 1.1.5, получаем утверждение доказываемой теоремы.

1.4 Оператор упора

1.4.1 Феноменологическое описание упора

Упор (в рассматриваемом случае *одномерный*), соответствующий отрезку $[0, 1]$ – это преобразователь, который монотонно возрастающему непрерывному входу $\sigma(t)$ и начальному состоянию $u_0 \in [0, 1]$ сопоставляет выход $u(t) = u_0 + \sigma(t) - \sigma(t_0)$, если последняя величина меньше 1, и 1 в противном случае. Для убывающего входа $\sigma(t)$ выход определяется аналогично: $u(t) = u_0 + \sigma(t) - \sigma(t_0)$, если последняя величина больше 0, и 0 в противном случае. Очевидным образом определение упора распространяется на кусочно монотонные непрерывные входы. В [10] доказано, что с помощью функционально-аналитической техники преобразователь упора корректно доопределяется для произвольных непрерывных входов.

Ниже описывается математическая модель упора в виде уравнения (5), имеющая смысл для всех непрерывных входов и эквивалентная приведенному выше феноменологическому описанию.

1.4.2 Математическая модель упора

Для монотонных входов σ приращение выходного сигнала при малых $dt \geq 0$ можно задать формулой:

$$D(t,u,dt) = \begin{cases} \sigma(t+dt) - \sigma(t), & \text{если} \quad u \in (0,1), \\ \sigma(t+dt) - \max\limits_{t \leq s \leq t+dt} \sigma(s), & \text{если} \quad u = 1, \\ \sigma(t+dt) - \min\limits_{t \leq s \leq t+dt} \sigma(s), & \text{если} \quad u = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Поэтому для кусочно монотонных входов эта формула дает локальное точное выражение для приращения выходного сигнала. Следовательно, зависимость выхода преобразователя упора от кусочно монотонного входа глобально описывается сильными решениями уравнения (5), (21), в котором множество U возможных значений (t,u) есть $\mathcal{D}(\sigma) \times [0,1]$.

Будем рассматривать сильные решения уравнения (5), (21) как математическую модель преобразователя упора для произвольных непрерывных входов $\sigma(t)$.

На рисунке изображен выход преобразователя упора (зеленый) при входе $\sigma(t) = -2\cos t$ (красный) и начальном значении $u_0 = 0$.

1.4.3 Теорема существования и единственности

При любом непрерывном на $[t_0, T)$ $(T \leq \infty)$ *входе* $\sigma(t)$ *существует единственное определенное на этом промежутке сильное решение уравнения* (5), (21), *удовлетворяющее условию* (11).

Доказательство. Покажем, что для любой начальной точки $(t_0, u_0) \in U$ функция $u(t) = \gamma_{t_0}^t u_0$ на некотором промежутке $[t_0, t_0 + a)$ $(a > 0)$ является сильным решением уравнения (5), (21). Рассмотрим три случая: $u_0 \in (0, 1)$, $u_0 = 1$ и $u_0 = 0$.

В первом случае

$$\gamma_{t_0}^t u_0 = u_0 + \sigma(t) - \sigma(t_0);$$

a можно выбрать так, чтобы при $t \in [t_0, t_0 + a)$ было $\gamma_{t_0}^t u_0 \in (0, 1)$. Тогда на этом промежутке $\gamma_{t_0}^t u_0$ является сильным решением, так как

$$\gamma_{t_0}^{t+dt} u_0 - \gamma_{t_0}^t u_0 = \sigma(t + dt) - \sigma(t) = D(t, u(t), dt).$$

В случае, когда $u_0 = 1$, выберем $a > 0$ так, чтобы при $t \in [t_0, t_0 + a)$ было

$$\gamma_{t_0}^t u_0 = 1 + \sigma(t) - \max_{t_0 \leq s \leq t} \sigma(s) > 0.$$

Тогда если при некотором $t \in (t_0, t_0 + a)$ $\gamma_{t_0}^t u_0 = 1$, то $\sigma(t) = \max\limits_{t_0 \leq s \leq t} \sigma(s)$; поэтому

$$\gamma_{t_0}^{t+dt} u_0 - \gamma_{t_0}^t u_0 = 1 + \sigma(t + dt) - \max_{t_0 \leq s \leq t+dt} \sigma(s) - 1 =$$

$$\sigma(t + dt) - \max_{t \leq s \leq t+dt} \sigma(s) = D(t, u(t), dt).$$

Если же $\gamma_{t_0}^t u_0 \in (0, 1)$, то $\sigma(t) < \max\limits_{t_0 \leq s \leq t} \sigma(s)$; но тогда $\sigma(t + dt) < \max\limits_{t_0 \leq s \leq t} \sigma(s)$ для достаточно малых $dt > 0$, так что $\max\limits_{t_0 \leq s \leq t+dt} \sigma(s) = \max\limits_{t_0 \leq s \leq t} \sigma(s)$.

Следовательно,

$$\gamma_{t_0}^{t+dt}u_0 - \gamma_{t_0}^{t}u_0 = \sigma(t+dt) - \sigma(t) = D(t, u(t), dt).$$

Для случая $u_0 = 0$ доказательство аналогично предыдущему.

Проверим, что выполнены условия утверждения о глобальной разрешимости. Для доказательства существования предела $\lim\limits_{t\to t_1} u(t) = u_1$ воспользуемся критерием Коши.

Рассмотрим возможные случаи. Если $u(t) \in (0,1)$ при $t \in [\widetilde{t}, t_1)$, то, применив к точке $(\widetilde{t}, u(\widetilde{t}))$ рассуждения, аналогичные приведенным выше с $a = t_1 - \widetilde{t}$, в силу единственности сильного решения получим $u(t) = u(\widetilde{t}) + \sigma(t) - \sigma(\widetilde{t})$. Тогда при $t', t'' \in [\widetilde{t}, t_1)$ $|u(t') - u(t'')| = |\sigma(t') - \sigma(t'')| \underset{t',t''\to t_1-0}{\to} 0$.

Если такого промежутка не существует, то найдется такая последовательность точек $t_n \to t_1 - 0$, что $u(t_n) = 1$ или $u(t_n) = 0$, причем хотя бы одна ее подпоследовательность $u(t_{n_k}) = 1$ или $u(t_{m_k}) = 0$ бесконечна. Пусть, для определенности, бесконечна t_{n_k}. Отметим, что так как функция σ непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$, то она равномерно непрерывна на нем. Следовательно, существует $\delta > 0$, такое, что $|\sigma(t) - \max\limits_{t'\le s\le t} \sigma(s)| < 1$ при $t', t \in (t_1 - \delta, t_1)$. Пусть $t_{n_p} \in (t_1 - \delta, t_1)$, тогда, как показано выше, $u(t) = 1 + \sigma(t) - \max\limits_{t_{n_p}\le s\le t} \sigma(s)$ при $t \in [t_{n_p}, t_1)$.

Отсюда

$$|u(t') - u(t'')| = |\sigma(t') - \sigma(t'') + \max_{t_{n_p}\le s\le t''} \sigma(s) - \max_{t_{n_p}\le s\le t'} \sigma(s)| \underset{t',t''\to t_1-0}{\to} 0$$

в силу равномерной непрерывности функций $\sigma(t)$ и $\gamma(t) = \max\limits_{t_{n_p}\le s\le t} \sigma(s)$ на $[t_{n_p}, t_1]$. Таким образом $\lim\limits_{t\to t_1} u(t)$ существует и так как $u(t) \in [0,1]$, то $u_1 \in [0,1]$, следовательно, $(t_1, u_1) \in U$.

Воспользовавшись утверждениями 1.1.1, 1.1.2 и замечанием к утверждению 1.1.5, получаем утверждение доказываемой теоремы.

1.5 Оператор люфта

1.5.1 Феноменологическое описание люфта

Люфт (в рассматриваемом случае *одномерный*), соответствующий отрезку $[0, h]$ – это преобразователь, который монотонно возрастающему непрерывному входу $\sigma(t)$ и начальному состоянию u_0 : $u_0 - h \leq \sigma(t_0) \leq u_0$ сопоставляет выход, который равен u_0, пока $\sigma(t) \leq u_0$, и $\sigma(t)$ в дальнейшем. Для убывающего входа $\sigma(t)$ выход определяется аналогично: u_0, пока $\sigma(t) \geq u_0$, и $\sigma(t)$ в дальнейшем. Очевидным образом определение люфта распространяется на кусочно монотонные непрерывные входы. В [10] доказано, что с помощью функционально-аналитической техники преобразователь люфта корректно доопределяется для произвольных непрерывных входов.

Ниже описывается математическая модель люфта в виде уравнения (5), имеющая смысл для всех непрерывных входов и эквивалентная модели, описанной в [10].

1.5.2 Математическая модель люфта

Для монотонных входов σ приращение выходного сигнала при малых $dt \geq 0$ можно задать формулой:

$$D(t, u, dt) = \begin{cases} \max\limits_{t \leq s \leq t+dt} \sigma(s) - \sigma(t), & \text{если } \sigma(t) = u, \\ \min\limits_{t \leq s \leq t+dt} \sigma(s) - \sigma(t), & \text{если } \sigma(t) = u - h, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{22}$$

Поэтому для кусочно монотонных входов эта формула дает локальное точное выражение для приращения выходного сигнала. Следовательно, зависимость выхода преобразователя люфта от кусочно монотонного входа глобально описывается сильными решениями уравнения (5), (22), в котором множество U возможных значений определяется следующим образом: $(t, u) \in U \Leftrightarrow [(u - h \leq \sigma(t) \leq u)]$.

Будем рассматривать сильные решения уравнения (5),(22) как математическую модель преобразователя люфта для произвольных непрерывных входов $\sigma(t)$.

На рисунке изображен выход (зеленый) преобразователя люфта, соответствующего отрезку $[0, 1]$, при входе $\sigma(t) = -2\cos t$ (красный) и начальном значении $u_0 = -1$.

1.5.3 Теорема существования и единственности

При любом непрерывном на $[t_0, T)$ $(T \leq \infty)$ *входе* $\sigma(t)$ *существует единственное определенное на этом промежутке сильное решение уравнения* (5), (22), *удовлетворяющее условию* (11).

Доказательство. Покажем, что для любой начальной точки $(t_0, u_0) \in U$ функция $u(t) = \gamma_{t_0}^t u_0$ на некотором промежутке $[t_0, t_0 + a)$ $(a > 0)$ является сильным решением уравнения (5), (22). Рассмотрим три случая: $u_0 - h < \sigma(t_0) < u_0$, $\sigma(t_0) = u_0$ и $\sigma(t_0) = u_0 - h$.

В первом случае

$$\gamma_{t_0}^t u_0 = u_0.$$

Так как функция $\sigma(t)$ непрерывна, a можно выбрать так, чтобы $u_0 - h < \sigma(t) < u_0$ при $t \in [t_0, t_0 + a)$. Тогда на этом промежутке

$\gamma_{t_0}^t u_0$ является сильным решением, так как

$$\gamma_{t_0}^{t+dt}u_0 - \gamma_{t_0}^t u_0 = u_0 - u_0 = D(t, u(t), dt).$$

В случае, когда $\sigma(t_0) = u_0$

$$\gamma_{t_0}^t u_0 = u_0 + \max_{t_0 \le s \le t} \sigma(s) - \sigma(t_0) = \max_{t_0 \le s \le t} \sigma(s) \ge \sigma(t).$$

Выберем $a > 0$ так, чтобы $\sigma(t) > \max\limits_{t_0 \le s \le t} \sigma(s) - h$ при $t \in [t_0, t_0 + a)$. Тогда если $\sigma(t) = \gamma_{t_0}^t u_0$ при некотором $t \in (t_0, t_0 + a)$, то $\sigma(t) = \max\limits_{t_0 \le s \le t} \sigma(s)$; поэтому

$$\gamma_{t_0}^{t+dt}u_0 - \gamma_{t_0}^t u_0 = \max_{t_0 \le s \le t+dt} \sigma(s) - \max_{t_0 \le s \le t} \sigma(s) =$$

$$\max_{t \le s \le t+dt} \sigma(s) - \sigma(t) = D(t, u(t), dt).$$

Если же t таково, что $\sigma(t) < \gamma_{t_0}^t u_0$, то $\sigma(t) < \max\limits_{t_0 \le s \le t} \sigma(s)$; но тогда $\sigma(t + dt) < \max\limits_{t_0 \le s \le t} \sigma(s)$ для достаточно малых $dt > 0$, так что $\max\limits_{t_0 \le s \le t+dt} \sigma(s) = \max\limits_{t_0 \le s \le t} \sigma(s)$.

Следовательно,

$$\gamma_{t_0}^{t+dt}u_0 - \gamma_{t_0}^t u_0 = \max_{t_0 \le s \le t+dt} \sigma(s) - \max_{t_0 \le s \le t} \sigma(s) = 0 = D(t, u(t), dt).$$

Для случая $\sigma(t_0) = u_0 - h$ доказательство аналогично предыдущему.

Таким образом, функция $u(t)$ является сильным решением задачи (5), (11), (22) и в силу утверждения 1.1.2 оно единственно. Глобальная разрешимость следует из глобальной разрешимости уравнения упора и связи операторов упора и люфта, описанной в следующем пункте.

1.5.4 Связь операторов упора и люфта

Для любого непрерывного на $[t_0, T)$ $(T \le \infty)$ *входа* σ *сильные решения уравнения люфта* (5), (22) *с* $h = 1$ *и уравнения упора* (5), (21) *связаны соотношением*

$$v(t) + u(t) = \sigma(t) + 1, \tag{23}$$

где $v(t)$ – решение уравнения люфта, $u(t)$ – уравнения упора.

Доказательство. Отметим прежде всего, что если $u_0 \in [0, 1]$, то $v_0 = (\sigma(t_0) + 1 - u_0) \in [\sigma(t_0), \sigma(t_0) + 1]$, т.е. является допустимым. Предположим, что соотношение (23) выполнено не для всех $t \in [t_0, T)$, пусть t_1 – инфимум тех t, для которых оно не выполнено. Ввиду непрерывности слева решений локально явных уравнений $v(t_1) + u(t_1) = \sigma(t_1) + 1$. Обозначим через $\gamma_{t_1}^t v(t_1)$, $\widetilde{\gamma}_{t_1}^t u(t_1)$ квазипотоки, порожденные уравнениями люфта и упора, соответственно. Тогда $v(t) = \gamma_{t_1}^t v(t_1)$, $u(t) = \widetilde{\gamma}_{t_1}^t u(t_1)$ на некотором промежутке $[t_1, t_1 + \delta)$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $u(t_1) = 1$, то $v(t_1) = \sigma(t_1)$, поэтому $u(t) = 1 + \sigma(t) - \max\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s)$, $v(t) = \sigma(t_1) + \max\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s) - \sigma(t_1)$. Тогда при $t \in [t_1, t_1 + \delta)$ $v(t) + u(t) = 1 + \sigma(t)$, что противоречит определению инфимума.

Если $u(t_1) = 0$, то $v(t_1) = \sigma(t_1) + 1$, поэтому $u(t) = \sigma(t) - \min\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s)$, $v(t) = \sigma(t_1) + 1 + \min\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s) - \sigma(t_1)$. Тогда также $v(t) + u(t) = 1 + \sigma(t)$ при $t \in [t_1, t_1 + \delta)$.

И, наконец, если $u(t_1) \in (0, 1)$, то $v(t_1) = 1 + \sigma(t_1) - u(t_1) \in (\sigma(t_1), \sigma(t_1) + 1)$, поэтому $u(t) = u(t_1) + \sigma(t) - \sigma(t_1)$, $v(t) = 1 + \sigma(t_1) - u(t_1)$. Следовательно, $v(t) + u(t) = 1 + \sigma(t)$.

Утверждение доказано.

1.5.5 Условие Липшица относительно входной функции

Для любых непрерывных на $[t_0, T)$ входов σ, $\widetilde{\sigma}$ и допустимого начального значения v_0 соответствующие им решения v, $\widetilde{v}$ уравнения люфта при $t \in [t_0, T)$ удовлетворяют условию:

$$|v(t) - \widetilde{v}(t)| \le \|\sigma - \widetilde{\sigma}\|_{[t_0, t]}. \tag{24}$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся такие $t_1 \in [t_0, T)$ и $\delta_1 > 0$, что

$$|v(t_1) - \widetilde{v}(t_1)| = \|\sigma - \widetilde{\sigma}\|_{[t_0,t_1]} \tag{25}$$

и при $t \in (t_1, t_1 + \delta_1]$

$$|v(t) - \widetilde{v}(t)| > \|\sigma - \widetilde{\sigma}\|_{[t_0,t]}. \tag{26}$$

Так как уравнение люфта локально явное, то $v(t) = \gamma_{t_1}^t v(t_1)$, $\widetilde{v}(t) = \gamma_{t_1}^t \widetilde{v}(t_1)$ на некотором промежутке $[t_1, t_1 + \delta_2)$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Очевидно, $|v(t) - \widetilde{v}(t)| > 0$ при $t \in (t_1, t_1 + \delta)$. Пусть для определенности $v(t) > \widetilde{v}(t)$. Тогда из (25), (26) следует, что для любого $t \in (t_1, t_1 + \delta)$ выполнено хотя бы одно из следующих неравенств $v(t) > v(t_1)$ или $\widetilde{v}(t) < \widetilde{v}(t_1)$.

Если в некоторой точке t_2 выполнено неравенство $v(t_2) > v(t_1)$, то, как следует из (22), $v(t_1) = \sigma(t_1)$ и, следовательно, $v(t) = v(t_1) + \max\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s) - \sigma(t_1) = \max\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s)$ при $t \in [t_1, t_1 + \delta)$. Тогда найдется такое $\tau \in (t_1, t_2]$, что $\max\limits_{t_1 \le s \le t_2} \sigma(s) = \sigma(\tau) = \max\limits_{t_1 \le s \le \tau} \sigma(s) = v(\tau)$. Так как $\widetilde{v}(\tau) \ge \sigma(\tau)$, то

$$v(\tau) - \widetilde{v}(\tau) = \sigma(\tau) - \widetilde{v}(\tau) \le \sigma(\tau) - \widetilde{\sigma}(\tau) \le \|\sigma - \widetilde{\sigma}\|_{[t_0,\tau]}.$$

Получили противоречие.

Случай $\widetilde{v}(t_2) < \widetilde{v}(t_1)$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

1.5.6 Условие Липшица относительно входной функции для оператора упора

Для любых непрерывных на $[t_0, T)$ входов σ, $\widetilde{\sigma}$ и допустимого начального значения u_0 соответствующие им решения u, $\widetilde{u}$ уравнения (21) при $t \in [t_0, T)$ удовлетворяют условию:

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \le 2\|\sigma - \widetilde{\sigma}\|_{[t_0,t]}. \tag{27}$$

Доказательство. Пользуясь связью между операторами упора и люфта, получаем

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)| = |\sigma(t)+1-v(t)-(\widetilde{\sigma}(t)+1-\widetilde{v}(t))| \leq |\sigma(t)-\widetilde{\sigma}(t)|+|v(t)-\widetilde{v}(t)|.$$

Отсюда с учетом предыдущем теоремы вытекает требуемое неравенство.

1.5.7 Утверждение об эквивалентности моделей

Математические модели люфта, предложенные в [10], *с.13 и в* 1.5.2 *эквивалентны для любых непрерывных входов. То же можно сказать и о моделях упора.*

Доказательство. Пусть σ – произвольный непрерывный вход, σ_n – последовательность кусочно монотонных функций, сходящаяся к σ при $n \to +\infty$, и φ_n – соответствующие им выходные функции, удовлетворяющие условию $\varphi_n(t_0) = u_0$ (по определению люфта выходы в обеих моделях для кусочно монотонных функций совпадают). Тогда, согласно модели [10], выходная функция φ оператора люфта, соответствующая σ, есть предел φ_n при $n \to +\infty$; согласно модели, предложенной в 1.5.2, выходная функция $\widetilde{\varphi}$ есть решение задачи Коши (5), (11), (22). В силу условия Липшица относительно входной функции (1.5.5) $|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi_n(t)| \leq \|\sigma - \sigma_n\|_{[t_0,t]}$. Таким образом, $|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi_n(t)| \to 0$ при $n \to +\infty$, следовательно, $\widetilde{\varphi} = \varphi$.

Отсюда и из связи между упором и люфтом вытекает эквивалентность моделей упора.

1.6 M-переключатель

1.6.1 Описание и математическая модель

Пусть $K = (K_i : i = 1, ..., k)$ – набор попарно не пересекающихся замкнутых множеств в $\mathbb{R}^N$; $\widetilde{K} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} K_i$; $M = (M_i : i = 1, ..., k)$

– набор функций, действующих в множестве $\rho = \{0, ..., r\}$, элементы которого будем называть *состояниями* M-переключателя, a – параметр, принимающий значение 0 или 1 и определяющий поведение переключателя в начальный момент времени. Будем считать, что *входная функция* $y(t)$ M-переключателя определена на *промежутке* $\mathcal{D}(y)$ и принимает значения в $\mathbb{R}^N$. Точку $t \in \mathcal{D}(y)$ назовем *моментом входа* функции y в множество K_i, если $(t, y(t)) \in K_i$ и выполнено одно из следующих двух условий: либо t – левый конец $\mathcal{D}(y)$ и $a = 1$; либо $(\tau, y(\tau)) \notin K_i$ на некотором интервале с правым концом в точке t. Смена состояний M-переключателя определяется уравнением с нелинейным дифференциалом, которое имеет вид:

$$s(t + dt) - s(t) = S_{K,M,a}(t, s(t), y, dt) + o(dt), \tag{28}$$

где

$$S_{K,M,a}(t, s, y, dt) = \begin{cases} M_i(s) - s, & \text{если } t \text{ есть момент входа} \\ & y \text{ в } K_i,\ dt > 0, \\ 0, & \text{если } t \text{ не является} \\ & \text{моментом входа } y \text{ ни в} \\ & \text{одно из } K_i \text{ или } dt = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Отметим, что y в (28) и (29) – это не значение в точке t, поскольку для функции S существенно также поведение функции y в некоторой левой окрестности точки t. Относительно аргумента y функция S, очевидно, обладает следующим свойством *вольтерровости*, или *причинности* [44]:

$$\begin{gathered} \text{если } y(\tau) = z(\tau) \text{ при } \tau \le t, \text{ то} \\ S_{K,M,a}(t, s, y, dt) = S_{K,M,a}(t, s, z, dt). \end{gathered} \tag{30}$$

Отметим, что свойство причинности в данном случае выступает в усиленной форме: совпадение значений функции в момент $t + dt$ гарантируется совпадением входов до момента t.

1.6.2 Реле как M-переключатель

Реле можно рассматривать как M-переключатель, если допустить возможность, что $u(t) = 1$ при $\sigma(t) < \beta$ и $u(t) = 0$ при $\sigma(t) > \alpha$. В этом случае реле – это M-переключатель, для которого $K_1 = (-\infty, \beta]$, $K_2 = [\alpha, +\infty)$, $M_i(s) = i - 1$ $(i = 1, 2)$, $a = 1$. Так как функции M_i постоянны на K_i, то можно не следить за моментом входа и описывать реле следующим образом:

$$s(t+dt) - s(t) \overset{*}{=} \begin{cases} i - 1 - s(t), & \textit{если } y(t) \in K_i \textit{ и } dt > 0, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

или

$$s(t+dt) \overset{*}{=} \begin{cases} i - 1, & \textit{если } y(t) \in K_i \textit{ и } dt > 0, \\ s(t) & \textit{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{31}$$

Отметим, что если начальные значения принадлежат множеству допустимых значений, то данная модель эквивалентна модели (5), (14). Действительно, обозначим через $\overline{s}$ выходную функцию, соответствующую входу $\sigma(t) = y(t)$ по (5), (14). Тогда

$$\overline{s}(t+dt) \overset{*}{=} \begin{cases} 1 + \overline{s}(t), & \textit{если } y(t) = \alpha,\ \overline{s}(t) = 0 \textit{ и } dt > 0, \\ -1 + \overline{s}(t), & \textit{если } y(t) = \beta,\ \overline{s}(t) = 1 \textit{ и } dt > 0, \\ \overline{s}(t) & \textit{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{32}$$

Из первой и третьей формул в правой части следует, что при $y(t) \geq \alpha$ и $dt > 0$ равенство $\overline{s}(t+dt) = 1$ выполняется при любом значении $\overline{s}(t)$, т.е. в этом случае $\overline{s}(t+dt) \overset{*}{=} s(t+dt)$. Аналогично устанавливается, что $\overline{s}(t+dt) = 0$ при $y(t) \leq \beta$ и $dt > 0$. Следовательно, уравнение (31) эквивалентно при соответствующем изменении обозначений уравнению (5), (14).

Если начальные значения не лежат в области допустимых значений, например, $y_0 < \beta$, $s_0 = 1$, то они мгновенно переходят в эту область и в дальнейшем в ней остаются.

Нетрудно видеть, что после указанного расширения области допустимых значений для реле оно сохраняет все свойства, отмеченные в параграфе 1.2.

1.6.3 Условия локальной явности

Каждое из двух следующих условий достаточно для того, чтобы уравнение (28) *было локально явным:*

$$\begin{gathered}\text{функция } y \text{ непрерывна и каждая из}\\ \text{функций } M_i \text{ есть константа на } \rho: M_i(s) = s_i;\end{gathered}\tag{33}$$

$$\begin{gathered}\text{к любой точке } t \in \mathcal{D}(y) \text{ справа примыкает}\\ \text{интервал, на котором нет точек входа}\\ \text{функции } y \text{ ни в одно из множеств } K_i.\end{gathered}\tag{34}$$

Пусть $t_0 \in \mathcal{D}(y)$,

$$s(t_0) = s_0 \qquad (s_0 \in \rho).\tag{35}$$

Покажем, что задача Коши (28), (29), (35) имеет на некоторой правой окрестности точки t_0 сильное решение $\varphi(t)$ при выполнении условия (33). Если на любом полуинтервале $[t_0, t_0+\alpha)$ $(\alpha > 0)$ существует момент входа функции y в некоторое K_i, то при достаточно малых α i единственно, в этом случае положим $\varphi(t_0) = s_0$, $\varphi(t) = M_i(s_0) = s_i$ при $t \in (t_0, t_0+\varepsilon)$. Иначе $\varphi(t) = s_0$ при $t \in [t_0, t_0+\varepsilon)$; ε выбирается так, чтобы $y(t) \notin \widetilde{K} \backslash K_i$ при $t \in [t_0, t_0+\varepsilon)$ в первом случае, $y(t) \notin \widetilde{K}$ – во втором (такое ε найдется в силу непрерывности y и замкнутости $K_j, j = 1, ..., k$). На $[t_0, t_0+\varepsilon)$ φ является сильным решением уравнения (28). Действительно, пусть $t_0 < t_1 < t_2 < t_0+\varepsilon$. Тогда, так как на $(t_0, t_0+\varepsilon)$ нет точек входа функции y ни в одно из множеств K_j, за исключением, быть может, K_i в первом случае, то

$S_{K,M,a}(t_1, \varphi(t_1), y, t_2 - t_1) = 0$, т.е любая константа является решением на этом интервале. При $t_1 = t_0$ $S_{K,M,a}(t_1, \varphi(t_1), y, t_2 - t_1)$ равно $s_i - s_0$ в первом случае и 0 во втором. Таким образом, $\varphi(t)$ является сильным решением (28), (29).

Теперь покажем, что уравнение (28) имеет на некоторой правой окрестности точки t_0 сильное решение $\varphi(t)$ при выполнении условия (34). Если t_0 является моментом входа функции y в множество K_i при некотором i, то положим $\varphi(t_0) = s_0$, $\varphi(t) = M_i(s_0)$ при $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$; иначе – $\varphi(t) = s_0$ при $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$ ($(t_0, t_0 + \varepsilon)$ – интервал из условия (34), на котором нет точек входа). Как и в предыдущем случае, нетрудно видеть, что на $[t_0, t_0 + \varepsilon)$ φ является сильным решением уравнения (28), (29).

Итак, в силу 1.1.1, 1.1.2 справедливо следующее утверждение: *при выполнении одного из условий* (33), (34) *задача Коши* (28), (29), (35) *имеет единственное сильное решение.*

Отметим, что условия локальной явности (33) и (34) независимы, как показывают следующие примеры.

1. Реле с пороговыми значениями $\beta = 0$, $\alpha = 1$ и входной функцией $y(t)$, определенной на отрезке $[0, 1]$ следующей формулой:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0, \\ 2nt & \text{при } t \in (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}], \\ -2nt + 2 & \text{при } t \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]. \end{cases}$$

Данный M-переключатель удовлетворяет условию (33) и, следовательно, описывается локально явным уравнением; но не удовлетворяет условию (34), так как в любой правой окрестности 0 найдется точка входа функции y в множество K_2.

2. M-переключатель с входной функцией $y(t) = 2\sin t$, для которого $K_i = \{i - 1\}$ $(i = 1, 2)$, $M_1(s) = 0$, $M_2(0) = 1$, $M_2(1) = 0$, $a \in \{0, 1\}$.

Данный M-переключатель удовлетворяет условию (34) ввиду кусочной монотонности входной функции и, следовательно, описывается локально явным уравнением; но, очевидно, не удовлетворяет условию (33).

Переходя к вопросу о глобальной разрешимости, запишем условие (34) в следующем усиленном виде:

$$\begin{gathered}\text{длина промежутка между моментами входа}\\ \text{не меньше чем } h \ (h>0 \text{ – некоторое число}).\end{gathered} \tag{36}$$

1.6.4 Теорема о глобальной разрешимости

Пусть выполнено одно из условий (33), (36). *Тогда для любой входной функции* $y(t)$, *определенной на* $[t_0, T)$ $(T \leq \infty)$, *любое решение уравнения* (28), (29) *продолжимо на* $[t_0, T)$.

Доказательство. Проверим выполнение условия утверждения о глобальной разрешимости, т.е. что для любого $t_1 \in (t_0, T)$ и любого решения φ существует предел $\lim\limits_{t \to t_1 - 0} \varphi(t) = s_i$ $(s_i \in \rho)$.

Пусть выполнено условие (33). Тогда $\|y(t)\| \leq H$ при $t \in [t_0, t_1]$ ввиду непрерывности y. Обозначим через d_{ij} расстояние между множествами $\overline{B}(0,H) \bigcap K_i$ и $\overline{B}(0,H) \bigcap K_j$ $(i,j = 1,...,k)$. Так как эти множества ограничены, замкнуты и не пересекаются при $i \neq j$, то $d_{ij} > 0$. Положим $d = \min\limits_{i \neq j}\{d_{ij}\}$ $(d > 0)$. Для доказательства существования предела покажем, что любое решение (28), (29), определенное на $[t_0, t_1)$, вблизи точки t_1 тождественно равняется некоторому s_i. Предположим противное; тогда для любого $\delta > 0$ найдутся такие точки t_2, t_3, что $t_1 - \delta < t_2 < t_3 < t_1$, $(t_2, y(t_2)) \in K_i$, $(t_3, y(t_3)) \in K_j$ $(i \neq j)$. Отсюда следует, что $\|(t_3, y(t_3)) - (t_2, y(t_2))\| \geq d$. С другой стороны, ввиду равномерной непрерывности y можно выбрать такое δ, что $\|(t_3, y(t_3)) - (t_2, y(t_2))\| < d$. Таким образом, рассматриваемый предел существует.

Пусть выполнено условие (36). Тогда на промежутке $[t_1 - h, t_1)$ либо нет точек входа, либо только одна. В первом случае $\varphi(t) = \varphi(t_1) = s_i$ при $t \in [t_1 - h, t_1)$. Во втором $\varphi(t) = M_i(\varphi(t_2)) = s_i$ при $t \in (t_2, t_1)$, где t_2 – точка входа функции y в K_i. Таким образом, рассматриваемый предел существует.

Воспользовавшись утверждением 1.1.5, получаем утверждение доказываемой теоремы.

1.7 Условия единственности решения задачи Коши

1.7.1 Пример отсутствия единственности для не сильных решений уравнения обобщенного реле

Рассмотрим уравнение (5) с функцией D вида (20), где $f(x) = 0$ при $x \leq l$ и $g(x) = (x+l)^2$ при $x \geq -l$. Пусть $\sigma(t) \equiv t$. Покажем, что функции $\varphi(t) = 0$ и $\psi(t) = (t+l)^2$ при $t \in [-l, l)$ являются решениями рассматриваемого уравнения, причем первое из них сильное, а второе – нет. Для нулевой функции, очевидно, выполняется соотношение (8). Проверим теперь, что соотношение (5) выполнено для $u(t) = (t+l)^2$. Если $t > -l$, то левая часть в (5) равна $(t+l+dt)^2 - (t+l)^2$, правая – $(t+l+dt)^2 - (t+l)^2 + o(dt)$. Если $t = -l$, то левая часть равна dt^2, правая – $o(dt)$. Итак, в любом случае соотношение (5) выполнено.

В силу 1.1.2 класс сильных решений обладает свойством единственности вправо. Отметим, что этим свойством будет обладать класс всех решений рассмотренного в данном пункте уравнения, если в (5) вместо $o(dt)$ написать $o(dt^2)$.

1.7.2 Теорема единственности для уравнения обобщенного реле

Если для любого t *справедливо соотношение*

$$\liminf_{dt\to+0}\frac{|f[\sigma(t+dt)]-g[\sigma(t+dt)]|}{dt}\neq 0,$$

то любое решение уравнения обобщенного реле (5), (20) *является сильным.*

Доказательство. Предположим противное, пусть ψ – не сильное решение уравнения обобщенного реле, тогда найдутся точка t' и последовательность $dt_k\to+0$, такие, что

$$\psi(t'+dt_k)-\psi(t')-D(t',\psi(t'),dt_k)\neq 0.$$

Рассмотрим сильное решение φ уравнения обобщенного реле, удовлетворяющее условию $\varphi(t')=\psi(t')$. Очевидно, $\varphi(t'+dt_k)\neq\psi(t'+dt_k)$ для достаточно больших k, и так как решения могут принимать только значения $f(\sigma(t))$ или $g(\sigma(t))$, то

$$|\psi(t'+dt_k)-\varphi(t'+dt_k)|=|f(\sigma(t'+dt_k))-g(\sigma(t'+dt_k))|.$$

С другой стороны,

$$\psi(t'+dt_k)-\varphi(t'+dt_k)=$$

$$=\psi(t')+D(t',\psi(t'),dt_k)+o(dt_k)-\varphi(t')-D(t',\varphi(t'),dt_k)=o(dt_k).$$

Таким образом,

$$|f(\sigma(t'+dt_k))-g(\sigma(t'+dt_k))|=o(dt_k).$$

Следовательно,

$$\liminf_{dt\to+0}\frac{[f(\sigma(t+dt))-g(\sigma(t+dt))]}{dt}=0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

1.7.3 Теорема единственности для M-переключателя

Если выполнено одно из условий (33), (34), *то любое решение уравнения M-переключателя* (28), (29) *является сильным.*

Доказательство. Предположим противное, пусть ψ – не сильное решение уравнения M-переключателя, тогда найдутся точка t' и последовательность $dt_k \to +0$, такие, что

$$\psi(t' + dt_k) - \psi(t') - S_{K,M,a}(t', \psi(t'), y, dt_k) \neq 0.$$

Рассмотрим сильное решение φ уравнения M-переключателя, удовлетворяющее условию $\varphi(t') = \psi(t')$. Очевидно, $\varphi(t' + dt_k) \neq \psi(t' + dt_k)$ для достаточно больших k, следовательно,

$$|\psi(t' + dt_k) - \varphi(t' + dt_k)| = |s_i - s_j| \geq 1 \ \ (\text{так как } i \neq j).$$

С другой стороны,

$$\psi(t' + dt_k) - \varphi(t' + dt_k) =$$

$$= \psi(t') + S_{K,M,a}(t', \psi(t'), y, dt_k)) + o(dt_k) -$$

$$\varphi(t') - S_{K,M,a}(t', \varphi(t'), y, dt_k) = o(dt_k).$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Ниже устанавливаются условия единственности в классе всех (не обязательно сильных) решений задачи Коши для локально явных уравнений.

1.7.4 Обобщенная теорема ван Кампена

Пусть $f : [t_0, T) \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_s : [s, T) \to \mathbb{R}^n$ – *непрерывные слева функции* ($s \in [t_0, T)$), *такие, что* $\varphi_s(s) = f(s)$ *и* $\|\varphi_s(t) - f(t)\|/(t - s) \underset{t \to s+0}{\to} 0$. *Пусть для любых* s, p, t *из* $[t_0, T)$, *удовлетворяющих неравенствам* $s < p \leq t$, *выполнено соотношение:*

$$\|\varphi_s(t) - \varphi_p(t)\| \leq L(t, p)\|\varphi_s(p) - \varphi_p(p)\|,$$

где функция $L : [t_0, T) \times [t_0, T) \to [0, +\infty)$ *ограниченна по второму аргументу на любом отрезке. Тогда* $f = \varphi_{t_0}$.

Доказательство. Зафиксировав произвольное t из интервала (t_0, T), рассмотрим функцию $\delta(s) = \varphi_{t_0}(t) - \varphi_s(t)$. Пусть $t_0 \le s < p \le t$, тогда

$$\frac{\|\delta(p) - \delta(s)\|}{p - s} = \frac{\|\varphi_s(t) - \varphi_p(t)\|}{p - s} \le \frac{L_1\|\varphi_s(p) - f(p)\|}{p - s} \underset{p \to s+0}{\to} 0,$$

где L_1 – константа, ограничивающая функцию $L_t(p) = L(t, p)$ на отрезке $[s, t]$. Следовательно, $\delta'_+(s) = 0$. Поскольку к тому же функция $\delta(s)$ непрерывна слева, отсюда вытекает [8, с. 46], что $\delta(s) \equiv \delta(t_0) = 0$. Таким образом, $\varphi_{t_0}(t) = f(t)$. Теорема доказана.

1.7.5 Теорема единственности для локально явных уравнений

Пусть любое сильное решение φ *локально явного уравнения* (5) *продолжимо вправо до* T, *т.е. если* $s < T$ *и* $s \in \mathcal{D}(\varphi)$, *то* φ *продолжимо на* $[s, T)$ *как сильное решение. Пусть для семейства всех сильных решений этого уравнения выполнено условие Липшица в следующей форме: если* $t, p \in \mathcal{D}(\varphi) \bigcap \mathcal{D}(\psi)$ *и* $p \le t$, *то*

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \le L(t, p)\|\varphi(p) - \psi(p)\|;$$

функция L *удовлетворяет условию предыдущей теоремы. Тогда любое решение этого уравнения является сильным и, следовательно, решение задачи Коши с любым допустимым начальным условием обладает свойством единственности вправо.*

Доказательство. Пусть f – решение локально явного уравнения (5) определенное на $[t_0, T)$. Так как $(s, f(s)) \in U$ для любого $s \in \mathcal{D}(f)$, то в силу утверждения о локальной разрешимости существует сильное решение рассматриваемого уравнения, график которого проходит через эту точку; обозначим через φ_s его продолжение на $[s, T)$. Так как φ_s и f – решения этого уравнения, то при

$t \geq s$ $f(t)-\varphi_s(t) = o(t-s)$. Таким образом, в силу обобщенной теоремы ван Кампена функция f совпадает с φ_{t_0}, т.е. является сильным решением.

Нетрудно показать, что для семейства сильных решений уравнения обобщенного реле условие Липшица выполнено тогда и только тогда, когда $f(x) \neq g(x)$ для любого $x \in [-l, l]$; в частности, это выполнено для уравнения реле (5), (14). Теорема 1.7.2 дает более общее условие единственности для уравнения обобщенного реле.

1.7.6 Теорема единственности для уравнений упора и люфта

Любое решение уравнения упора (5), (21) (*уравнения люфта* (5), (22)) *является сильным.*

Доказательство. Как показано в пункте 1.4.3, уравнение упора является локально явным и все его сильные решения могут быть продолжены вправо до T – правой границы области определения входного сигнала σ. Поэтому в силу теоремы 1.7.5 достаточно проверить, что для сильных решений уравнения упора выполняется условие Липшица. Покажем, что условие Липшица выполняется с константой $L = 1$, т.е. при $t \geq \tau$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|.$$

Если последнее неравенство выполнено не для всех $t \geq \tau$, то обозначим через t_1 инфимум тех t, для которых оно не выполнено (в самой точке t_1 неравенство выполняется в силу непрерывности слева решений локально явного уравнения). Без ограничения общности будем считать, что $\varphi(t_1) > \psi(t_1)$.

Если $\varphi(t_1) = 1$ и $\psi(t_1) \in (0, 1)$, то в некоторой правой δ-окрестности точки t_1 $\varphi(t)-\psi(t) = \varphi(t_1) - \max\limits_{t_1 \leq s \leq t} \sigma(s) - \psi(t_1) + \sigma(t_1)$. Так как функция σ непрерывна, то мы можем выбрать δ так, чтобы $\max\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s) - \sigma(t_1) < \varphi(t_1) - \psi(t_1)$. Тогда $|\varphi(t) - \psi(t)| = |\varphi(t_1) - \psi(t_1) - (\max\limits_{t_1 \le s \le t} \sigma(s) - \sigma(t_1))| \le |\varphi(t_1) - \psi(t_1)|$. Таким образом,

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \le |\varphi(t_1) - \psi(t_1)| \le |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|,$$

что противоречит определению инфимума.

Другие случаи ($1 = \varphi(t_1) > \psi(t_1) = 0,\ 1 > \varphi(t_1) > \psi(t_1) > 0,\ 1 > \varphi(t_1) > \psi(t_1) = 0$) рассматриваются аналогично.

Локальная явность уравнения люфта и продолжимость его сильных решений показана в 1.5.3. Выполнение условия Липшица для люфта вытекает из связи с упором (23), так как для любых его сильных решений $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$ и всех $t_0 \le \tau \le t < T$

$$|\widetilde{\varphi}(t) - \widetilde{\psi}(t)| = |\sigma(t) + 1 - \widetilde{\varphi}(t) - (\sigma(t) + 1 - \widetilde{\psi}(t))|$$

$$= |\varphi(t) - \psi(t)| \le |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| = |\widetilde{\varphi}(\tau) - \widetilde{\psi}(\tau)|.$$

Теорема доказана.

1.8 Альтернативные модели оператора упора

1.8.1 Модель упора для кусочно монотонных входов

Для монотонных и кусочно монотонных входов в качестве модели упора можно принять также уравнение (5) с функцией

$$D(t, u, dt) = \begin{cases} \sigma(t + dt) - \sigma(t), & \text{если} \quad u \in (0, 1), \\ \min\{\sigma(t + dt) - \sigma(t), 0\}, & \text{если} \quad u = 1, \\ \max\{\sigma(t + dt) - \sigma(t), 0\}, & \text{если} \quad u = 0. \end{cases} \qquad (37)$$

Предпочтение отдано функции (21) по той причине, что в этом случае получается локально явное уравнение для любых непрерывных входов, в то время как уравнение (5), (37) при немонотонном входе может не быть локально явным. Более того, задача Коши для этого уравнения с непрерывным входом может не иметь решения (см.

пункт 1.8.4). Будем рассматривать фиксированный входной сигнал

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 \quad \textit{при} \quad t = 0, \\ -(4n+1)t + 2 \quad \textit{при} \quad t \in (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}], \\ (4n-1)t - 2 \quad \textit{при} \quad t \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]. \end{cases} \tag{38}$$

1.8.2 Замечание об эквивалентности для уравнений с нелинейными дифференциалами

При рассмотрении уравнений с нелинейными дифференциалами иногда бывает полезно следующее простое утверждение: *если функция $\widetilde{D}(t, u, dt)$ имеет ту же область определения, что и функция D в правой части уравнения* (5), *и касается ее справа в любой точке $(t, u) \in U$, т.е.*

$$\frac{\widetilde{D}(t, u, dt) - D(t, u, dt)}{dt} \to 0 \quad \textit{при} \quad dt \to +0, \tag{39}$$

то уравнение (5) *эквивалентно аналогичному уравнению с функцией $\widetilde{D}$ в правой части.*

1.8.3 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для $t_0 > 0$

Задача Коши (5), (11), (37), (38) *имеет единственное решение на* $[t_0, 1)$ *при* $t_0 > 0$.

Доказательство. Временно обозначим через $\widetilde{D}$ функцию (37) и покажем, что при $t > 0$ выполнено (39) с функцией (21) в качестве D. Рассмотрим возможные варианты.

Если $t \in [1/(2n+1), 1/2n)$, то при малых dt $\sigma(t+dt) - \max\{\sigma(s) : t \le s \le t + dt\} = \sigma(t + dt) - \sigma(t) = \min\{\sigma(t + dt) - \sigma(t), 0\}$, а $\sigma(t + dt) - \min\{\sigma(s) : t \le s \le t + dt\} = 0 = \max\{\sigma(t + dt) - \sigma(t), 0\}$. Если $t \in [1/2n, 1/(2n-1))$, то $\sigma(t + dt) - \max\{\sigma(s) : t \le s \le t + dt\} = 0 = \min\{\sigma(t+dt) - \sigma(t), 0\}$, а $\sigma(t+dt) - \min\{\sigma(s) : t \le s \le$

$t+dt\} = \sigma(t+dt) - \sigma(t) = \max\{\sigma(t+dt) - \sigma(t), 0\}$. Следовательно, при малых dt справедливо тождество $\widetilde{D}(t,u,dt) - D(t,u,dt) = 0$. В силу утверждения об эквивалентности уравнений с нелинейными дифференциалами уравнение (5), (37), (38) имеет те же решения, что и уравнение (5), (21), (38), и, в частности, при условии (11) однозначно разрешимо на $[t_0, 1)$ в силу утверждений 1.4.3, 1.7.5.

1.8.4 Отсутствие решения для $t_0 = 0$

Уравнение (5), (37), (38) *не имеет решения, удовлетворяющего условию* $u(0) = 0$.

Доказательство. Действительно, если бы такое решение φ существовало, то выполнялось бы соотношение

$$\varphi(dt) - D(0,0,dt) = o(dt),$$

в частности,

$$[\varphi(\frac{1}{2n+1}) - D(0,0,\frac{1}{2n+1})](2n+1) \to 0 \ \ \text{при} \ \ t \to +\infty. \tag{40}$$

С другой стороны,

$$D(0,0,\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2n+1}$$

(см. (37), (38)) и при достаточно больших n

$$\varphi(\frac{1}{2n+1}) = \varphi(\frac{1}{2n+2}) + \sigma(\frac{1}{2n+1}) - \sigma(\frac{1}{2n+2}) \geq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

Последние два соотношения противоречат (40). Утверждение доказано.

1.8.5 Модель упора для непрерывно дифференцируемых входов

В [43] изучена иная модель упора, предполагающая непрерывную дифференцируемость входной функции. Эта модель дается в виде следующего уравнения с нелинейным дифференциалом:

$$u(t+dt) - u(t) = P[u(t) + \dot{\sigma}(t)dt] - u(t) + o(dt), \tag{41}$$

где P – оператор проектирования $\mathbb{R}$ на $[0,1]$:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \in [0,1], \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

(здесь использованы обозначения, отличные от применявшихся в [43]).

Для уравнения (41) доказано выполнение условий теоремы из [43], гарантирующей существование и единственность решения начальной задачи и дающей оценку погрешности приближенного решения, построенного по методу типа метода Эйлера, через модуль непрерывности производной от входной функции.

Отметим, что уравнение (41), вообще говоря, не является локально явным. Например, при входной функции

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ t^3 \sin \frac{1}{t}, & t > 0 \end{cases}$$

и начальном условии $u(0) = 0$ единственное решение уравнения (41) имеет положительные значения в сколь угодно малой правой окрестности нуля, так как на промежутках вида $[\frac{1}{1{,}5\pi+2\pi n}, \frac{1}{0{,}5\pi+2\pi n}]$ функция σ возрастает, а, следовательно, растет и u, если только оно не равно единице. С другой стороны, $P[u(0) + \dot{\sigma}(0)dt] \equiv 0$, т.е. решение локально явного уравнения должно было бы равняться нулю вблизи точки $t = 0$.

1.9 Система "контроль-коррекция"

1.9.1 Общее описание системы

Работа системы во времени разбивается на промежутки, разделяемые последовательными моментами контроля-коррекции. Каждый следующий момент контроля-коррекции определяется по предыдущему моменту и соответствующему состоянию процесса. В промежутке между моментами контроля-коррекции выходной сигнал x, называемый состоянием процесса в момент t, управляется одним из заданного набора входных сигналов по типу сервомеханизма, т.е. приращение выхода равно приращению входа; выбор конкретного входа для данного промежутка времени определяется в последний момент контроля-коррекции по следующему моменту.

1.9.2 Математическая модель

Рассматривается система уравнений с нелинейными дифференциалами. Первое уравнение:

$$\Delta\tau + o(dt) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < \tau(t) \text{ или } dt = 0, \\ a(t, x(t)), & \text{если} \quad t = \tau(t) \text{ и } dt > 0 \end{cases} \tag{42}$$

($\Delta\tau = \tau(t + dt) - \tau(t)$, $a(t, x) > 0$) описывает соответствие между "состоянием процесса" x и "моментом контроля" τ.

Второе уравнение:

$$x(t + dt) - x(t) + o(dt) =$$

$$\begin{cases} f(\tau(t), t + dt) - f(\tau(t), t), & \text{если} \quad t < \tau(t), \\ f(t + a(t, x(t)), t + dt) - f(t + a(t, x(t)), t), & \text{если} \quad t = \tau(t) \end{cases} \tag{43}$$

определяет состояние процесса. Функция f непрерывна слева по второму аргументу.

1.9.3 Утверждение о локальной явности

Система (42), (43) *является локально явной.*

Доказательство. Покажем, что для любой начальной точки (t_0, τ_0, x_0) $(\tau_0 \geq t_0)$ система (42), (43) имеет сильное решение на некотором промежутке $[t_0, t_0 + \delta)$.

Рассмотрим возможные варианты. Если $\tau_0 > t_0$, то положим $\delta = \tau_0 - t_0$. Нетрудно видеть, что на промежутке $[t_0, t_0+\delta)$ пара функций $\tau(t) = \tau_0$, $x(t) = x_0 + f(\tau_0, t) - f(\tau_0, t_0)$ является сильным решением системы (42), (43) (так как всюду на этом промежутке $t < \tau_0$).

Если $\tau_0 = t_0$, то положим $\delta = a(t_0, x_0)$. Покажем, что на промежутке $[t_0, t_0 + \delta)$ пара функций $\tau(t) = \tau_0 + a(t_0, x_0) = \tau_1$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ $\tau(t_0) = \tau_0$ и $x(t) = x_0 + f(\tau_1, t) - f(\tau_1, t_0)$ является сильным решением системы (42), (43). Если $t_0 < t_1 \leq t_2 < t_0+\delta = \tau_1$, то

$$\tau(t_2) - \tau(t_1) = \tau_0 + a(t_0, x_0) - \tau_0 - a(t_0, x_0) = 0$$

при этом

$$\tau(t_1) - \tau(t_0) = \tau_0 + a(t_0, x_0) - \tau_0 = a(t_0, x_0).$$

В свою очередь

$$x(t_2) - x(t_1) = x_0 + f(\tau_1, t_2) - f(\tau_1, t_0) - x_0 -$$

$$f(\tau_1, t_1) + f(\tau_1, t_0) = f(\tau(t_1), t_2) - f(\tau(t_1), t_1)$$

и

$$x(t_1) - x(t_0) = x_0 + f(\tau_1, t_1) - f(\tau_1, t_0) - x_0 =$$

$$f(\tau_0 + a(t_0, x_0), t_1) - f(\tau_0 + a(t_0, x_0), t_0).$$

Таким образом, для любой начальной точки (t_0, τ_0, x_0) $(\tau_0 \geq t_0)$ система (42), (43) имеет сильное решение на промежутке $[t_0, t_0 + \delta)$ и, следовательно, является локально явной.

1.10 Сравнение с квазидифференциальными уравнениями

1.10.1 КДУ и его решения

Класс квазидифференциальных уравнений (КДУ) введен в рассмотрение А.И.Панасюком [23] как обобщение уравнения интегральной воронки, изученного в [22]. Основная идея заключается в такой записи обыкновенных дифференциальных уравнений, которая не использует линейную структуру фазового пространства и поэтому применима для описания эволюционных процессов в произвольном метрическом пространстве. В случае уравнения интегральной воронки в этом качестве выступает пространство замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа. Концепция КДУ последовательно развивалась и изучалась (порой независимо и в иной терминологии) в работах А.И.Панасюка с соавторами [25]-[28], В.А.Плотникова, Л.И. Плотниковой [29], других авторов ([34],[43],[13],[14]).

В данном параграфе показывается, что класс КДУ после некоторого естественного расширения понятия решения охватывает локально явные уравнения. С другой стороны, устанавливается, что ни один из классов КДУ, для которых доказаны теоремы о разрешимости задачи Коши, не содержит в себе целиком класса локально явных уравнений.

Рассмотрим некоторые факты из теории квазидифференциальных уравнений (см. [23],[25]). Пусть Y – полное метрическое пространство с метрикой d; $Y_0 \subset Y$; $\sigma_0 > 0$. Рассматривается отображение $F : [0, \sigma_0] \times [0, 1] \times Y_0 \to Y$, удовлетворяющие двум условиям:
1) $F(0, t, y) = y$;
2) как функция от σ отображение $F(\sigma) = F(\sigma, t, y)$ абсолютно непрерывно, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\sum d(F(b_i), F(a_i)) < \varepsilon$$

при

$$\sum (b_i - a_i) < \delta$$

для любого конечного семейства непересекающихся отрезков $(a_i, b_i) \subset [0, \sigma_0)$.

КДУ записывается в виде

$$\lim_{\sigma\downarrow 0}\sigma^{-1}d(y(t+\sigma),F(\sigma,t,y(t)))=0. \tag{44}$$

Абсолютно непрерывное отображение $y(t)$, $0\le t\le\eta$, такое, что для почти всех t существует предел (44), равный нулю, называется *решением КДУ* (44).

1.10.2 Локально явное уравнение как КДУ

Локально явное уравнение (и вообще уравнение с нелинейным дифференциалом) (5) можно представить в виде (44). Неизвестная функция y в данном случае обозначена через u, приращение σ независимой переменной t в (44) – через dt; отображение F для (44) имеет вид

$$F(\sigma,t,y)=y+D(t,y,\sigma).$$

Условие 1) из 1.10.1 для уравнения (5) эквивалентно равенству (6), которое для локально явных уравнений предполагается выполненным. При рассмотрении локально явных уравнений мы не накладываем на решения требования абсолютной непрерывности (и даже непрерывности – требуется только непрерывность слева). Условие 2) на отображение F в 1.10.1 связано с конкретной теоремой о разрешимости КДУ в условиях типа Каратеодори, доказанной в [25],[26]. Для локально явных уравнений подобные условия могут не выполняться, поэтому такие уравнения могут моделировать существенно негладкие и разрывные процессы.

Итак, локально явные уравнения можно отнести к классу квазидифференциальных, если соответствующим образом ослабить требования гладкости решений. Однако они не входят ни в один класс КДУ, для которых известны теоремы о существовании решений задачи Коши.

В [25],[26] для КДУ доказана теорема о существовании абсолютно непрерывного решения задачи Коши, обобщающая известную теорему Каратеодори для обыкновенных дифференциальных уравнений. Не приводя формулировки этой теоремы отметим, что ее условия не выполнены для локально явных уравнений, рассмотренных в параграфах 1.2 – 1.6, 1.9 поскольку каждое из них при подходящих данных может не иметь абсолютно непрерывных решений.

Для такого M-переключателя (1.6), как реле (1.2), это справедливо, например, если $\sigma(t_0) = \beta$, $u_0 = 1$, в этом случае единственное решение разрывно. Для обобщенного реле (1.3), если функция f – функция ван дер Вардена (см. [40], с.272) и $\sigma(t_0) = \beta$, то на некотором промежутке решение совпадает с f и, следовательно, не является абсолютно непрерывным. Аналогичная ситуация имеет место для уравнения упора (1.4), если $u_0 \in (0, 1)$ и σ – функция ван дер Вардена и для люфта (1.5), если σ – функция ван дер Вардена и $u_0 - h < \sigma(t_0) < u_0$. Соответствующий пример для системы "контроль-коррекция" (1.9) будет рассмотрен ниже.

1.10.3 Теорема о непрерывных решениях КДУ

В [28] приведена теорема, гарантирующая существование непрерывных решений. По сравнению с 1.10.1 используются несколько измененные обозначения: $\sigma = h$, $\sigma_0 = h_0$; предполагается, что $Y_0 = Y$ и $D = [0, \xi) \times Y$ $(0 < \xi \leq +\infty)$.

Пусть для всякой точки $(t_0, y_0) \in D$ существуют $\varepsilon > 0$, $L > 0$ и неубывающая непрерывная функция $\varphi(t)$, $t \in [0, \xi)$, такие, что имеют место следующие соотношениях, причем записанные в этих соотношения пределы равномерны по $(t, y) \in W_\varepsilon(t_0, y_0) = \{(t, y) \in$

$D : |t - t_0| \le \varepsilon,\ d(y, y_0) \le \varepsilon\}$:

$$\limsup_{h\downarrow 0, \tau\downarrow 0, y'\to y} \frac{d(F(\tau + h, t, y), F(h, t + \tau, y')) - d(F(\tau, t, y), y')}{h} \le 0, \quad (45)$$

$$\limsup_{h\downarrow 0} h^{-1}[d(F(h, t, y), F(h, t, y')) - d(y, y')] \le Ld(y, y'),$$

$$\limsup_{h\downarrow 0} h^{-1}[d(F(h, t, y), y) - \varphi(t + h) + \varphi(t)] \le 0.$$

Тогда для всякого $(t_0, y_0) \in D$ существует непрерывное решение КДУ (44) $y(t, t_0, y_0)$, $t_0 \le t < t_0 + \eta$, $\eta > 0$, отвечающее начальному условию $y(t_0, t_0, y_0) = y_0$; это решение единственно, продолжимо на максимальный правый интервал существования $[t_0, \omega(t_0, y_0))$, $t_0 < \omega(t_0, y_0) \le \infty$, и непрерывно по совокупности переменных.

Подчеркнем, что в отличие от теоремы, которая обсуждалась в пункте 1.10.1, в настоящей теореме к решениям не предъявляется требование абсолютной непрерывности. Тем не менее, класс локально явных уравнений не охватывается условиями последней теоремы. Например, как показано выше, в достаточно типичных ситуациях уравнение реле вообще не имеет непрерывных решений, т.е. условия сформулированной теоремы для него не могут быть выполнены.

Если рассматривать локально явные уравнения с непрерывными решениями, то они также не все охватываются сформулированной теоремой. Рассмотрим, например, уравнение упора (5), (21) с конкретной входной функцией $\sigma(t) = t$ и покажем, что для него не выполняется условие (45). Отображение F в рассматриваемой ситуации имеет вид

$$F(dt, t, u) = \begin{cases} u + dt, & \text{если } u \in [0, 1), \\ u, & \text{если } u = 1. \end{cases}$$

Пусть $t \in \mathbb{R}$, $u \in (0, 1)$, $\tau > 0$, $h > 0$, $\tau + h < 1 - u$, $u' \in (0, 1)$. Тогда выражение V, стоящее под знаком верхнего предела в (45), равно (в соответствующих обозначениях)

$$V = h^{-1}[|u + \tau + h - u' - h| - |u + \tau - u'|] = 0.$$

Это означает, что верхний предел есть просто предел, и он равен нулю. Покажем, что этот предел не является равномерным относительно u.

Действительно, равномерность по u означала бы , что для некоторого $\delta > 0$ из неравенств $\tau < \delta$, $h < \delta$, $|u - u'| < \delta$ независимо от конкретного значения u (значение t считаем фиксированным, например, $t = 0$) вытекает неравенство $|V| < 1/2$. Но если выбрать $\tau = h < \delta$, $u = 1 - h$, $u' = 1$, то указанные неравенства будут выполнены, но для V мы получим:

$$V = h^{-1}[|1 - h + h + h - 1| - |1 - h + h - 1] = \frac{h}{h} = 1.$$

Итак, предел для V не является равномерным по u, т.е. условие теоремы не выполнено.

1.10.4 КДУ с разрывными решениями

В [28] рассмотрено также КДУ более общего вида, которое может описывать разрывные процессы. Пусть задано отображение $J : D \to Y$ (используются обозначения предыдущего пункта), определяющее скачки системы в момент t из состояния y в состояние $y^* = J(t, y)$. Рассматривается уравнение

$$\limsup_{h \downarrow 0} h^{-1} d(y(t + h), F(h, t, J(t, y(t)))) = 0. \tag{46}$$

Непрерывное слева отображение $y(t)$, $t_0 \leq t < t_0 + \eta$, удовлетворяющее на $[t_0, t_0 + \eta)$ уравнению (46), называется решением этого уравнения.

Для уравнения (46) доказана следующая теорема ([28], теорема 3.1). *Пусть F удовлетворяет условиям теоремы 1.10.3 и выполнены следующие условия:*

i) кратные скачки отсутствуют, т.е. отображение J идемпотентно

$$J(t, J(t, y)) \equiv J(t, y); \tag{47}$$

ii) если отображение $y(t)$, $t_0 \le t < t_0 + \eta_0$, $\eta_0 > 0$, удовлетворяет в точке $(t_0, J(t_0, y_0))$ КДУ (46), то найдется такое $\eta \in (0, \eta_0]$, что $J(t, y(t)) = y(t)$ при $t_0 < t < t_0 + \eta$.

Тогда для любого $(t_0, y_0) \in D$ найдется единственное решение КДУ (46) $y(t) = y(t, t_0, y_0)$, $t_0 \le t \le t_0 + \eta_0$, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$. Это решение продолжимо на максимальный правый интервал существования $[t_0, \omega(t_0, y_0))$.

Рассмотрен также случай, когда первоначально заданная функция скачков $J(t, y)$ не удовлетворяет условию (47), однако после некоторого эквивалентного преобразования задача сводится к уравнению того же вида (46) с новой функцией скачков $J_\infty(t, y)$, уже удовлетворяющей этому условию.

В условиях этой теоремы каждое решение в любой точке своей области определения имеет (конечный) предел справа. Таких решений может не быть, например, у рассмотренной в параграфе 1.8 системы "контроль-коррекция". Пусть для определенности в этой системе $\tau(0) = \tau_0 > 0$, $x(0) = 0$,

$$f(\tau_0, t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \sin\frac{1}{t}, & t > 0. \end{cases}$$

Тогда на промежутке $[0, \tau_0)$ система (42), (43) имеет единственное решение $x(t) = f(\tau_0, t)$, которое в точке $t = 0$ не имеет предела справа.

Итак, класс локально явных уравнений не охватывается и условиями теоремы данного пункта.

2 Системы, содержащие локально явные уравнения

В настоящей главе рассмотрены три типа систем, состоящих из обыкновенных дифференциальных уравнений и локально явных уравнений с нелинейными дифференциалами. В общем случае такие системы можно представить в виде:

$$\Delta v = V(t, v, x_t^{t+dt}, dt) + o(dt), \tag{48}$$

$$\dot{x} = f(t, v, x). \tag{49}$$

Здесь $\Delta v = v(t + dt) - v(t)$, $\dot{x}$, v, x – значения соответствующих функций в момент t, а x_t^{t+dt} – сужение функции x на отрезок $[t, t+dt]$. Изучаются вопросы о локальной и глобальной разрешимости задачи Коши и о единственности решения. Мы будем условно называть (49) "уравнением управляемого объекта а v – "управлением".

Самая простая и типичная ситуация рассмотрена в параграфе 2.1. Здесь в качестве (48) выступает уравнение реле, а правая часть во втором уравнении при каждом фиксированном значении v предполагается непрерывной по совокупности переменных (t, x) и удовлетворяющей по x одностороннему глобальному условию Липшица с коэффициентом, непрерывно зависящим от t. В этих условиях установлена глобальная теорема существования и единственности задачи Коши, причем установлено, что точки смены состояния реле могут сгущаться только на бесконечности.

Система, рассмотренная в параграфе 2.2, наряду с управляемым объектом содержит M-переключатель и, возможно, другие элементы, описываемые локально явными уравнениями (например, обобщенное реле, упор, люфт). Поскольку уравнение M-переключателя не в любой ситуации является локально явным, такие системы имеют свою специфику. Доказана теорема об однозначной локальной разрешимости и при дополнительных ограничениях теорема о глобальной разрешимости задачи Коши. Для таких систем возможен вариант непродолжимости решения за некоторую точку τ из-за бесконечного числа переключений до этой точки.

Основным отличием системы, рассмотренной в параграфе 2.3, является то, что на правую часть уравнения управляемого объекта ни в какой форме не накладывается условие Липшица. При этом предполагается, что правая часть локально явного уравнения (48) непрерывно зависит от аргумента x_t^{t+dt} – это условие выполнено, например, для уравнений упора и люфта. В этих условиях решение задачи Коши не обязательно единственно и, возможно, существует лишь на маленьком промежутке ([52]). Доказательство локальной теоремы существования проведено с помощью принципа Шаудера.

Четвертый и пятый параграфы посвящены задаче об устойчивости решений системы, моделирующей один из вариантов регулятора температуры. Для характеризации степени устойчивости мы применяем понятие ψ-*устойчивости*, которое является обобщением известного понятие экспоненциальной устойчивости. Анализу этого понятия и его частного случая p-устойчивости, а также признаков p- и ψ-устойчивости так называемых обобщенных динамических систем, посвящен четвертый параграф главы. Его результаты используются в пятом параграфе для исследования ψ-устойчивости решений одного класса систем релейного управления, которые можно рассматривать как математические модели процесса регулирования температуры.

2.1 Замкнутая система с реле

2.1.1 Постановка задачи

Пусть работа управляемого объекта описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, u, x), \tag{50}$$

где функция $f : \mathbb{R} \times \{0; 1\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности t, x и удовлетворяет по x правостороннему условию Липшица с коэффициентом, непрерывно зависящим от t, т.е.

$$(f(t, u, x) - f(t, u, y), x - y) \leq L(t)\|x - y\|^2,$$

где $L(t)$ – непрерывная функция.

Управляющая функция u представляет собой выход реле, описываемого уравнениями (5), (14), в котором входной сигнал есть непрерывная скалярная функция от состояния управляемого объекта x :

$$\sigma(t) = p(x(t)). \tag{51}$$

Под решением системы (5), (14), (50), (51) будем понимать определенную на некотором промежутке I вещественной оси пару функций $(x(t),\ u(t))$, удовлетворяющую двум условиям: 1) функция $u(t)$ непрерывна слева и равенство (5) выполнено при любом $t \in I$; 2) $x(t)$ непрерывна на I и равенство (50) может не выполняться лишь в точках разрыва функции u.

Данную систему будем рассматривать вместе с начальными условиями (11) и

$$x(t_0) = x_0. \tag{52}$$

2.1.2 Теорема о дифференциальном неравенстве

Приведем формулировку необходимой нам в дальнейшем теоремы о дифференциальном неравенстве (см. [11], с.16). Через D_* обозначим правое нижнее производное число Дини, т.е.

$$D_*\varphi(t) = \liminf_{\Delta t \to +0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

(здесь $\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$), через $\psi_в(t)$ – верхнее решение уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = L(t, \psi),$$

заданное на $[t_0, t_1]$.

Будем считать, что функция $L(t, \psi)$ непрерывна по совокупности переменных. Тогда справедлива следующая теорема:

Пусть функция $\varphi(t)$ *непрерывна и при всех* $t \in [t_0, t_1]$ *удовлетворяет условию*

$$D_*\varphi(t) \leq L[t, \varphi(t)].$$

Пусть $\varphi(t_0) \leq \psi(t_0)$.

Тогда

$$\varphi(t) \leq \psi_в(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

2.1.3 Теорема о глобальной однозначной разрешимости задачи Коши

При выполнении перечисленных в 2.1.1 *условий задача* (5), (11), (14), (50), (51), (52) *имеет на* $[t_0, +\infty)$ *решение, обладающее свойством единственности вправо, при этом точки разрыва функции* $u(t)$ *могут сгущаться только на бесконечности.*

Доказательство. По начальным данным t_0, x_0, u_0 и $\sigma_0 = p(x_0)$ найдем в соответствии с замечанием 1.2.4 число $u_1 = v(\sigma_0, u_0)$ и функцию $\overline{x}_0(t)$ – решение задачи (50), (52) с $u = u_1$, определенное на $[t_0, +\infty)$. Глобальная однозначная разрешимость вправо указанной задачи следует из непрерывности правой части уравнения (50) по (t, x) и правостороннего условия Липшица (по этому поводу см., например, [12], [31], [32]). Положим $\overline{\sigma}_0(t) = p[\overline{x}_0(t)]$ и рассмотрим решение $\overline{u}_0(t)$ задачи (5), (11), (14) с $\sigma(t) = \overline{\sigma}_0(t)$. Положим $t_1 = \inf\{t > t_0 : \overline{u}_0(t) \neq u_1\}$; в силу замечания 1.2.4 $t_1 > t_0$. Если $t_1 < +\infty$, то положим $x_1 = \overline{x}_0(t_1), \sigma_1 = p(x_1)$ и аналогичным образом построим $u_2 = v(\sigma_1, u_1), \overline{x}_1(t), \overline{\sigma}_1(t), \overline{u}_1(t)$ и t_2. Продолжим такое построение бесконечно или до получения на некотором шаге $t_k = +\infty$.

По построению определенная на $\bigcup\limits_i [t_i, t_{i+1})$ пара функций $\overline{x}(t) = \overline{x}_i(t), \overline{u}(t) = \overline{u}_i(t), (t \in [t_i, t_{i+1}))$ является решением рассматриваемой задачи. Это решение, как нетрудно видеть, обладает свойством единственности вправо (в силу замечания 1.2.4 и свойства единственности вправо решений уравнения (50) с фиксированным u).

Остается показать, что множество точек t_i на любом конечном промежутке $[t_0, T)$ конечно; отсюда будет вытекать и то, что $\mathcal{D}(\overline{x}) = [t_0, +\infty)$. Для этого установим следующую оценку функции $\overline{x}(t)$ на $[t_0, T)$:

$$\|\overline{x}(t)\| \le e^{L(T-t_0)}(\|x_0\| + \frac{M}{L}) - \frac{M}{L} \equiv \overline{M}, \tag{53}$$

где $M = \max\{\|f(t, m, 0)\| : t \in [t_0, T], m \in \{0, 1\}\}$, $L = \max\limits_{t_0 \le t \le T} L(t)$.

Пусть $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{x}(t)\|^2 = (f[t, u_{i+1}, \overline{x}(t)], \overline{x}(t)) =$$
$$= (f[t, u_{i+1}, \overline{x}(t)] - f[t, u_{i+1}, 0], \overline{x}(t) - 0) + (f[t, u_{i+1}, 0], \overline{x}(t)) \le$$
$$\le L\|\overline{x}(t)\|^2 + M\|\overline{x}(t)\|.$$

Отсюда по теореме о нестрогом дифференциальном неравенстве (см. 2.1.2) вытекает

$$\|\overline{x}(t)\| \le e^{L(t_{i+1}-t_i)}(\|x_i\| + \frac{M}{L}) - \frac{M}{L}.$$

Индукцией по i из этого неравенства нетрудно получить следующее:

$$\|\overline{x}(t)\| \le e^{L(t_{i+1}-t_0)}(\|x_0\| + \frac{M}{L}) - \frac{M}{L}. \tag{54}$$

Действительно, для $i = 0$ неравенство справедливо, а переход от $i-1$ к i осуществляется следующим образом:

$$\|\overline{x}(t)\| \leq e^{L(t_{i+1}-t_i)}(\|x_i\| + \frac{M}{L}) - \frac{M}{L} \leq$$

$$\leq e^{L(t_{i+1}-t_i)}[e^{L(t_i-t_0)}(\|x_0\| + \frac{M}{L}) - \frac{M}{L} + \frac{M}{L}] - \frac{M}{L} =$$

$$= e^{L(t_{i+1}-t_0)}(\|x_0\| + \frac{M}{L}) - \frac{M}{L}.$$

Из неравенство (54), очевидно, следует (53).

Таким образом, график функции $\overline{x}$ лежит в компакте $K = [t_0, T] \times \overline{B}(0, \overline{M})$; на нем непрерывные функции $f(t, 0, x)$ и $f(t, 1, x)$ ограничены. Следовательно, существует константа, ограничивающая норму $\dot{\overline{x}}(t)$ на промежутке $[t_0, T)$. Поскольку функция $\overline{x}$, очевидно, абсолютно непрерывна, отсюда вытекает, что она удовлетворяет условию Липшица.

Покажем, что $\exists(\delta > 0)\forall(i)[t_{i+1} - t_i \geq \delta]$. Очевидно, $|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)| = \alpha - \beta$. Так как функция p равномерно непрерывна на $\overline{B}(0, \overline{M})$, то $\exists(\delta_1 > 0)\forall(x', x'' \in \overline{B}(0, \overline{M}) : \|x' - x''\| < \delta_1)[|p(x') - p(x'')| < \alpha - \beta]$. Положим $\delta = \delta_1/L_1$, где L_1 – константа из условия Липшица для $\overline{x}$. Если $t_{i+1} - t_i < \delta$, то $\|\overline{x}(t_{i+1}) - \overline{x}(t_i)\| \leq L_1(t_{i+1} - t_i) < L_1\delta \leq \delta_1$ и, следовательно, $|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)| = |p(\overline{x}(t_{i+1})) - p(\overline{x}(t_i))| < \alpha - \beta$. Отсюда следует, что $t_{i+1} - t_i \geq \delta$. Таким образом, на конечном промежутке $[t_0, T)$ может быть только конечное множество точек, в которых u меняет свое значение.

Теорема полностью доказана.

Различные варианты доказываемой в этом пункте теоремы о глобальной разрешимости и единственности задачи Коши известны в литературе; приводимый вариант отличается более формальным описанием математической модели и, соответственно, формально более строгим доказательством.

2.2 Система с M-переключателем

2.2.1 Постановка задачи

Рассматривается система трех уравнений с тремя неизвестными функциями: переменным состоянием $s(t)$, значениями вектора негладких функций $u(t)$ и гладких переменных $x(t)$.

$$s(t+dt) - s(t) \stackrel{*}{=} S_{K,M,a}(t, s(t), y, dt); \tag{55}$$

$$u(t+dt) - u(t) \stackrel{*}{=} D(t, s(t+dt), u(t), x_t^{t+dt}, dt); \tag{56}$$

$$\dot{x} = f(t, s(t), u(t), x(t)); \tag{57}$$

в (55) функция y определяется через u и x формулой

$$y(t) = Y(t, u(t), x(t)). \tag{58}$$

Уравнение (57) в точках разрыва функции $s(t)$ может не выполняться, однако функция $x(t)$ должна сохранять непрерывность.

Указанную систему будем рассматривать с начальными условиями:

$$s(t_0) = s_0,\ u(t_0) = u_0,\ x(t_0) = x_0. \tag{59}$$

Функция $S_{K,M,a}$ в (55) описана в 1.6.1. Пусть V – замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$; U_{x_0}, U_{u_0} – открытые окрестности точек x_0, u_0 в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, соответственно. Относительно D, f и Y предполагается, что

$$\begin{gathered}\text{функция } (t,s,u,\varphi,dt) \mapsto D(t,s,u,\varphi,dt) \text{ определена}\\ \text{при } t \in [t_0, t_0+h) \ (h>0 - \text{ фиксированный параметр}),\\ s \in \rho,\ u \in V,\ \varphi \in C([t,t+dt], U_{x_0}),\ dt \in [0,+\infty);\\ \text{принимает значения в } \mathbb{R}^m \text{ и выражение } D(t,s,u,x_t^{t+dt},dt)\\ \text{непрерывно по } dt, \text{ если функция } x \text{ непрерывна;}\end{gathered} \tag{60}$$

$$\begin{gathered}\text{при замене } s(t+dt) \text{ на } s_1 \in \rho \text{ для}\\ \text{любой функции } x \in C([t_1, t_1+h_1], U_{x_0})\\ \text{уравнение (56) является локально явным;}\end{gathered} \tag{61}$$

$$\begin{gathered} D \text{ удовлетворяет условию Липшица по четвертому аргументу :}\\ \|D(t, s_1, u_1, \varphi, dt) - D(t, s_1, u_1, \psi, dt)\| \le L\|\varphi - \psi\|;\end{gathered} \tag{62}$$

$$\begin{gathered}\text{функция } f : [t_0, t_0+h) \times \rho \times U_{u_0} \times U_{x_0} \to \mathbb{R}^n\\ \text{непрерывна по первому аргументу и удовлетворяет}\\ \text{условию Липшица по третьему и четвертому аргументам}\\ \|f(t, \sigma, \upsilon, \xi) - f(t, \sigma, \overline{\upsilon}, \overline{\xi})\|_{\mathbb{R}^n} \le L_f(\|\upsilon - \overline{\upsilon}\|_{\mathbb{R}^m} + \|\xi - \overline{\xi}\|_{\mathbb{R}^n});\end{gathered} \tag{63}$$

$$Y : [t_0, t_0+h) \times V \times U_{x_0} \to \mathbb{R}^N. \tag{64}$$

Если в уравнениях (56), (57) заменить $s(t+dt)$ и $s(t)$ на фиксированное $s_1 \in \rho$, то получится замкнутая система с неизвестными $u(t),\ x(t)$.

Будем предполагать, что

$$\begin{gathered}\text{для любого решения } (u(t), x(t)) \text{ такой системы}\\ \text{и функции } y(t), \text{описываемой равенством (58),}\\ \text{уравнение (55) является локально явным.}\end{gathered} \tag{65}$$

Это условие, например, выполнено, если функция Y непрерывна и функции M_i, связанные с M-переключателем, постоянны на ρ – см. (33).

2.2.2 Теорема о локальной разрешимости.

При выполнении условий (60) – (65) *задача* (55) – (59) *имеет решение на некотором промежутке* $[t_0, T)$. *И на любом промежутке решение единственно.*

Доказательство. Если $y(t_0) = Y(t_0, u_0, x_0) \in K_i$ при некотором i и $a = 1$, то положим $s_1 = M_i(s_0)$; иначе $s_1 = s_0$. Пусть $\overline{B}(x_0, r) \subset U_{x_0}$. Для любой функции $x \in C([t_0, T_0], \overline{B}(x_0, r))$ $(t_0 \le T_0 < t_0 + h)$ положим $u(t) = u_0 + D(t_0, s_1, u_0, x^t_{t_0}, t - t_0)$. Отметим, что в силу условия (60) функция u непрерывна. Кроме того,

$$\|u(t) - u_0\| \le \|D(t_0, s_1, u_0, x^t_{t_0}, t - t_0) - D(t_0, s_1, u_0, x_0, t - t_0)\| +$$

$$+ \|D(t_0, s_1, u_0, x_0, t - t_0)\| \le L\|x^t_{t_0} - x_0\| + M \le Lr + M = R,$$

где M – константа, ограничивающая непрерывную функцию $D(t_0, s_1, u_0, x_0, t - t_0)$ на отрезке $[t_0, T_0]$. Следовательно, u при $t \in [t_0, T_0]$ принимает значения в $\overline{B}(u_0, R)$. Будем считать, что r и $T_0 - t_0$ настолько малы, что $\overline{B}(u_0, R) \subset U_{u_0}$. Наконец, рассмотрим функцию

$$(Ax)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f[\tau, s_1, u(\tau), x(\tau)]d\tau.$$

Ввиду условия (63) и непрерывности u и x подынтегральная функция непрерывна. Далее,

$$\|(Ax)(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} \|f[\tau, s_1, u(\tau), x(\tau)]\| d\tau \le H(T_0 - t_0),$$

где $H = \max\{\|f[\tau, s_1, \upsilon, \xi]\| : \tau \in [t_0, T_0], \upsilon \in \overline{B}(x_0, R)\}, \xi \in \overline{B}(x_0, r)\}$. Пусть $T_1 \le \min\{T_0, \frac{r}{H} + t_0\}$. Тогда $A : C([t_0, T_1], \overline{B}(x_0, r)) \to C([t_0, T_1], \overline{B}(x_0, r))$. Покажем, что, при соответствующем выборе T_1, A является сжатием. Пусть $x, \overline{x} \in C([t_0, T_1], \overline{B}(x_0, r))$ и $u, \overline{u}$ – порожденные ими функции.

$$\|(Ax)(t) - (A\overline{x})(t)\| = \|\int_{t_0}^{t} (f[\tau, s_1, u(\tau), x(\tau)] - f[\tau, s_1, \overline{u}(\tau), \overline{x}(\tau)])d\tau\|$$

$$\le \int_{t_0}^{t} L_f(\|u(\tau) - \overline{u}(\tau)\| + \|x(\tau) - \overline{x}(\tau)\|)d\tau$$

$$\le L_f(\int_{t_0}^{T_1} [\|D(t_0, s_1, u_0, x^\tau_{t_0}, \tau - t_0) - D(t_0, s_1, u_0, \overline{x}^\tau_{t_0}, \tau - t_0)\|$$

$$+\|x(\tau)-\overline{x}(\tau)\|)]d\tau) \le L_f(\int_{t_0}^{T_1} L\|x-\overline{x}\|d\tau \ + \int_{t_0}^{T_1} \|x-\overline{x}\|d\tau)$$
$$= L_f(L+1)(T_1-t_0)\|x-\overline{x}\|.$$

Таким образом, если $T_1 < t_0 + \frac{1}{L_f(L+1)}$, то A является сжимающим отображением и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку x, которая является решением уравнения (57). В свою очередь, в силу условия (61) функция $u(t)$ является решением уравнения (56) на некотором промежутке $[t_0, T_2) \subset [t_0, T_1)$. По найденному x построим $y(t) = Y(t, u(t), x(t))$. В силу условия (65) на некотором промежутке $[t_0, T) \subset [t_0, T_2]$ функция $s(t)$, равная s_0 при $t = t_0$ и s_1 при $t \in [t_0, T)$ является решением уравнения (55). Таким образом, на промежутке $[t_0, T)$ тройка функций $(s(t), u(t), x(t))$ является решением задачи (55) – (59).

Покажем единственность. Предположим противное, пусть $(\overline{s}(t), \overline{u}(t), \overline{x}(t))$ и $(\widetilde{s}(t), \widetilde{u}(t), \widetilde{x}(t))$ – различные решения рассматриваемой задачи. Введем обозначение $t_1 = \inf\{t > t_0 : (\overline{s}(t), \overline{u}(t), \overline{x}(t)) \neq (\widetilde{s}(t), \widetilde{u}(t), \widetilde{x}(t))\}$. Ввиду непрерывности x и u и непрерывности слева s, $(\overline{s}(t_1), \overline{u}(t_1), \overline{x}(t_1)) = (\widetilde{s}(t_1), \widetilde{u}(t_1), \widetilde{x}(t_1))$. Из вольтерровости функции $S_{K,M,a}$ (см. (30)) следует, что $\overline{s}(t) = \widetilde{s}(t) = s_1$ в некоторой правой окрестности точки t_1 – (t_1, t_2). Рассмотрим оператор $\widetilde{A}$, определяемый аналогично A:

$$(\widetilde{A}x)(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} f[\tau, s_1, u(\tau), x(\tau)]d\tau,$$

где $x : [t_1, t_2] \to B(x_0, r)$ – непрерывная функция, $u(t) = \overline{u}(t_1) + D(t_1, s_1, \overline{u}(t_1), x_{t_1}^t, t - t_1)$. Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям относительно A, покажем, что $\widetilde{A}$ действует в $C([t_1, t_1 + \alpha], \overline{B}(x(t_1), r))$ и является сжатием при достаточно малом $\alpha > 0$ и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку, откуда следует, что $\overline{x}(t) = \widetilde{x}(t)$. Тогда при $t \in [t_1, t_1 + \alpha]$

$$\overline{u}(t) = \overline{u}(t_1) + D(t_1, s_1, \overline{u}(t_1), \overline{x}^t_{t_1}, t - t_1) =$$

$$= \widetilde{u}(t_1) + D(t_1, s_1, \widetilde{u}(t_1), \widetilde{x}^t_{t_1}, t - t_1) = \widetilde{u}(t).$$

Это противоречит выбору t_1.

2.2.3 Замечание об операторе сдвига.

В условиях теоремы о локальной разрешимости через $g^t_{t_0}(s_0, \upsilon_0, x_0)$ будем обозначать значение в момент t решения системы (55) – (58) равное (s_0, υ_0, x_0) при $t = t_0$. Отметим, что в силу единственности решения оператор $g^t_{t_0}$ однозначно определен. Введем еще одно обозначение, $\tau = \sup \mathcal{D}(\varphi)$, где $\varphi(t) = g^t_{t_0}(s_0, \upsilon_0, x_0)$. Из теоремы о локальной разрешимости следует, что $\tau > t_0$ и $\tau \notin \mathcal{D}(\varphi)$.

2.2.4 Теорема о глобальной разрешимости.

Рассматривается система (55) – (58). *Предполагается, что* $U_{x_0} = \mathbb{R}^n, U_{u_0} = \mathbb{R}^m, t_0 + h = T \leq +\infty$ *и выполнены условия* (60), (62) – (65), *причем условие Липшица в* (62) *и* (63) *локальное. Кроме того*

$$\begin{gathered}\textit{для любой функции } x \in C([t_0, T_1), \mathbb{R}^n)\\ \textit{уравнение } (56) \textit{ с начальным значением } u_0 \in V\\ \textit{имеет ограниченное решение на } [t_0, T_1)\ (T_1 \leq T);\end{gathered} \tag{66}$$

$$\begin{gathered}(f(t, s, \upsilon, \xi), \xi) \leq L_r(\|\xi\|^2) \textit{ при } \|\upsilon\| \leq r,\\ \textit{неубывающая функция } L_r \textit{ удовлетворяет}\\ \textit{условию Осгуда на бесконечности,}\\ \textit{т.е. } \int_1^{+\infty} \frac{dz}{L_r(z)} = +\infty.\end{gathered} \tag{67}$$

Достаточно требовать, чтобы последнее условие было выполнено лишь при больших по норме ξ.

Тогда $s(t)$ имеет на $[t_0,\tau)$ бесконечно много скачков или $\tau = T$. Доказательство. Предположим противное: $\tau < T$ и количество скачков конечно. Пусть t_1 – момент последнего переключения, тогда $s(t) = s_1$ ($s_1 \in \rho$) при $t \in (t_1, \tau)$. По условию (66) $u(t)$ ограничено на $[t_1,\tau)$ по норме некоторой константой r. Пусть (67) выполнено при $\|\xi\| > h$. Тогда в силу условия (63) $(f(t,s,\upsilon,\xi),\xi) \le H$ при $t \in [t_0,\tau]$, $\|\upsilon\| \le r$, $\|\xi\| \le h$. Положим $\mathcal{L}_r(z) = \max\{H, L_r(z)\}$. Функция $\mathcal{L}_r(z)$, очевидно, не убывает и удовлетворяет условию Осгуда на бесконечности, кроме того условие (67) с функцией $\mathcal{L}_r(\|\xi\|^2)$ выполняется для любых ξ, откуда следует ограниченость x на $[t_1,\tau)$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2(f(t,s,u(t),x(t)),x) \le 2\mathcal{L}_r(z)(\|x(t)\|^2)$$

и, следовательно, по теореме о дифференциальном неравенстве

$$\|x(t)\|^2 \le z(t),$$

где z – решение задачи Коши

$$\dot{z} = 2\mathcal{L}_r(z), \quad z(t_1) = z_1 \quad (z_1 = \|x(t_1)\|^2).$$

Очевидно, $z(t)$ ограничено на $[t_1,\tau)$, иначе $\int_{z_1}^{z(t)} \frac{dz(s)}{\mathcal{L}_r(z)(z(s))} \to +\infty$ при $t \to \tau$, но $\int_{z_1}^{z(t)} \frac{dz(s)}{\mathcal{L}_r(z)(z(s))} \le 2(\tau - t_1) < 2(T - t_1) \le +\infty$.

Итак, u и x ограничены, следовательно, выражение $f(t,s_1,u(t),x(t))$ ограничено на $[t_1,\tau)$. Это, в свою очередь, гарантирует ограниченность $\dot{x}(t)$ и, следовательно, существование предела x при $t \to \tau$; обозначим его ξ и продолжим непрерывную функцию $x(t)$ на промежуток $[t_0,\tau+1)$; тогда в силу (66) функция u будет также однозначно определена на этом промежутке. Применив в точке $(\tau,s_1,u(\tau),\xi)$ теорему о локальной разрешимости, получим продолжение решения рассматриваемой системы. Это противоречит определению τ.

2.2.5 Пример

Для примера рассмотрим систему, которую будем условно называть "регулятором температуры". Регулируемую температуру $x(t)$ требуется поддерживать в пределах $\beta \leq x(t) \leq \alpha$. Реле, играющее в данном примере роль переключателя, включает обогреватель при достижении нижнего предела β и отключает при $x(t) = \alpha$. Скорость нагревания $\dot{x}(t)$ поддерживается в пределах $[v_0, v_1]$ $(0 < v_0 < v_1)$ с помощью упора. Входная функция для упора имеет вид:

$$\sigma(t) = p(t, x(t)).$$

Будем предполагать, что функция $p(t, x)$ определена при всех вещественных t и x, непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица по x с не зависящей от t константой L_p. Выходная функция упора $u(t)$ принимает значения в $[0, 1]$ и изменяется с той же скоростью, что и $\sigma(t)$, если позволяет упор, или сохраняет неизменное значение 0 или 1. Нагревание при включенном реле описывается формулой:

$$\dot{x} = (v_1 - v_0)u(t) + v_0, \tag{68}$$

охлаждение при выключенном реле – формулой:

$$\dot{x} = -f_0(x) \quad (-f_0 \leq -m < 0) \tag{69}$$

с непрерывно дифференцируемой на $[\beta, +\infty)$ функцией f_0. В этом примере в качестве M-переключателя выступает реле с пороговыми значениями β и α $(\beta < \alpha)$. Входная функция $y(t)$ совпадает с регулируемой температурой, выход $s(t)$ принимает значения 0 (реле выключено) или 1 (включено). Положим $K_1 = (-\infty, \beta]$, $K_2 = [\alpha, +\infty)$. Если $x(t_1) \in K_1$, то $s(t) = 0$ при $t > t_1$ и обогреватель включен, пока $x(t)$ не попадет в K_2. Если же $x(t_1) \in K_2$, то $s(t) = 1$ при $t > t_1$ и обогреватель выключен, пока $x(t)$ не попадет в K_1. Таким образом, для реле $a = 1$ и функции $M_i(s)$ $(i = 1, 2)$, определяющие смену состояний реле, постоянны на множествах K_i и равны $i - 1$; при $x(t) \in (\beta, \alpha)$ состояние реле не меняется до прихода $x(t)$ в одно из множеств K_i. Итак, уравнение M-переключателя (55) можно в данном случае записать в виде

$$s(t+dt) - s(t) \overset{*}{=} \begin{cases} i - 1 - s(t), & \textit{если } x(t) \in K_i \textit{ и } dt > 0, \\ 0, & \textit{если } x(t) \in (\beta, \alpha) \textit{ или } dt = 0. \end{cases} \qquad (70)$$

Для этого уравнения выполнено условие (33), обеспечивающее его локальную явность и, следовательно, выполнено условие (65) локальной и глобальной теорем о разрешимости задачи Коши.

Скорость отдачи тепла обогревателем ограничивается "упором". Входная функция для него имеет вид

$$\sigma(t) = p(t, x(t)).$$

Уравнение упора с входной функцией $u(t)$, принимающей значения в множестве $V = [0, 1]$, с учетом (21) запишется в виде:

$$u(t+dt) - u(t) \overset{*}{=} \begin{cases} \sigma(t+dt) - \sigma(t), & \textit{если } u(t) \in (0,1), \\ \sigma(t+dt) - \max\limits_{t \le s \le t+dt} \sigma(s), & \textit{если } \ u(t) = 1, \\ \sigma(t+dt) - \min\limits_{t \le s \le t+dt} \sigma(s), & \textit{если } \ u(t) = 0. \end{cases} \qquad (71)$$

Правая часть здесь зависит только от $u(t) \in V$ и $\sigma_t^{t+dt} \in C([t, t+dt], \mathbb{R})$ (т.е. в конечном итоге от x_t^{t+dt}) и непрерывна по переменной dt, т.е. выполнено условие (60) в варианте глобальной теоремы 2.2.4. По переменной σ_t^{t+dt} она удовлетворяет условию Липшица. Действительно, если $u(t) = 1$, то

$$\begin{gathered} |\sigma(t+dt) - \max_{t \le s \le t+dt} \sigma(s) - \widetilde{\sigma}(t+dt) + \max_{t \le s \le t+dt} \widetilde{\sigma}(s)| \le \\ \le |\sigma(t+dt) - \widetilde{\sigma}(t+dt)| + |\max_{t \le s \le t+dt} \sigma(s) - \max_{t \le s \le t+dt} \widetilde{\sigma}(s)|. \end{gathered} \qquad (72)$$

Пусть, для определенности, $\max\limits_{t\le s\le t+dt}\sigma(s)\ge\max\limits_{t\le s\le t+dt}\widetilde{\sigma}(s)$. На отрезке $[t,t+dt]$ непрерывная функция $\sigma(t)$ в некоторой точке t_1 принимает наибольшее значение. Отсюда

$$\begin{aligned}
&|\max_{t\le s\le t+dt}\sigma(s)-\max_{t\le s\le t+dt}\widetilde{\sigma}(s)|=\max_{t\le s\le t+dt}\sigma(s)-\max_{t\le s\le t+dt}\widetilde{\sigma}(s)=\\
&\quad=\sigma(t_1)-\max_{t\le s\le t+dt}\widetilde{\sigma}(s)\le\sigma(t_1)-\widetilde{\sigma}(t_1)\le\|\sigma_t^{t+dt}-\widetilde{\sigma}_t^{t+dt}\|.
\end{aligned}\tag{73}$$

Из (72) и (73) следует, что условие Липшица выполняется с константой 2. В случае $u(t)=0$ утверждение доказывается аналогично, для $u\in(0,1)$ оно очевидно. Учитывая, что отображение $x_t^{t+dt}\mapsto\sigma_t^{t+dt}$ L_p-липшицево, получаем, что для (71) выполнено условие (62). Выполнение условия (61), установлено в 1.4.3; там же доказано, что выполнено более сильное условие (66).

Наконец, уравнение для $x(t)$ имеет вид

$$\dot{x}(t)=\begin{cases}(v_1-v_0)u(t)+v_0, & \textit{если } s(t)=0,\\ -f_0[x(t)], & \textit{если } s(t)=1.\end{cases}\tag{74}$$

Правая часть этого уравнения определена для всех $s(t)\in\{0,1\}$, $u(t)\in\mathbb{R}$ и $x(t)\in\mathbb{R}$ (если $\mathcal{D}(f_0)=\mathbb{R}$). По $u(t)$ она удовлетворяет глобальному условию Липшица с константой v_1-v_0, а по $x(t)$ – локальному условию Липшица, так как f_0 непрерывно дифференцируема. Итак, условие (63) выполнено в варианте глобальной теоремы.

Для проверки условия (67) заметим, что в рассматриваемой ситуации

$$(f(t,s,\upsilon,\xi),\xi)=\begin{cases}[(v_1-v_0)\upsilon+v_0]\xi, & \textit{если } s=0,\\ -f_0(\xi)\xi, & \textit{если } s=1\end{cases}\tag{75}$$

Если $\xi<\beta$, то $s=0$, поэтому следует оценивать первое выражение в правой части (75). Как отмечено после условия (67), его достаточно требовать лишь при больших $|\xi|$. Можно дополнительно считать, что $\xi < -1$, так что при $|v| \le r$

$$(f(t,s,v,\xi),\xi) \le [(v_1 - v_0)r + v_0]\xi^2.$$

Функция в правой части, очевидно, удовлетворяет по переменной ξ^2 неубывает и удовлетворяет условию Осгуда на бесконечности.

Если $\xi > \alpha$, то $s = 1$ (будем дополнительно считать, что $\xi > |\alpha|$) и, следовательно,

$$(f(t,s,v,\xi),\xi) = -f_0(\xi)\xi \le 0 \le \xi^2;$$

мы также получаем оценку с неубывающей осгудовской функцией.

Итак, система (70), (71), (74) удовлетворяет условию глобальной теоремы. Следовательно, если $\varphi(t) = g_{t_0}^t(s_0, u_0, x_0)$, $\tau = \sup \mathcal{D}(\varphi)$, то $\tau = +\infty$ или $s(t)$ имеет бесконечно много скачков на $[t_0, \tau)$.

Покажем, что для рассматриваемой системы второй случай при $\tau < +\infty$ невозможен. Действительно, если $x(t) < \beta$, то $s(t) = 0$ и правая часть в (74) не меньше $v_0 > 0$ (так как $u(t) \in [0,1]$). Если же $x(t) > \alpha$, то $s(t) = 1$ и $\dot{x} = -f_0[x(t)] \le -m < 0$. Это означает, что при $x_0 < \beta$ значения $x(t)$ лежат в $[x_0, \alpha]$, при $x_0 > \alpha$ – в $[\beta, x_0]$, а при $x_0 \in [\beta, \alpha]$ – в $[\beta, \alpha]$. В любой ситуации функция $\dot{x}(t)$ ограничена на $[t_0, \tau)$. Значит, функция $x(t)$ не может за конечное время пройти бесконечно много раз раз расстояние между K_1 и K_2, т.е. $s(t)$ не может иметь бесконечно много скачков.

Таким образом, система (70), (71), (74) при любых начальных условиях имеет единственное решение на $[t_0, +\infty)$.

2.2.6 Пример системы с бесконечным числом переключений

Рассмотрим систему, состоящую из M-переключателя с входной функцией $x(t)$, для которого $K_1 = \{0\}$, $\rho = \{0,1\}$, $M_1(0) = 1$, $M_1(1) = 0$, и дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, s(t), u(t), x(t))$, где

$$f(t,0,u,x)=\begin{cases} 3t^2\sin\frac{1}{t}-t\cos\frac{1}{t}, & \text{если } t<0,\\ 0, & \text{если } \ t\geq 0; \end{cases}$$

$$f(t,1,u,x)=\begin{cases} -3t^2\sin\frac{1}{t}+t\cos\frac{1}{t}, & \text{если } t<0,\\ 0, & \text{если } \ t\geq 0. \end{cases}$$

Здесь уравнение вида (56) отсутствует, будем считать, что $u(t)\equiv u_0$.

Указанную систему будем рассматривать с начальными условиями $s(-1)=0$, $u(-1)=u_0$, $x(-1)=\sin 1$.

Проверим выполнение условий теоремы о глобальной разрешимости. Условия (60), (62) относительно функции D выполнены, так как эта функция тождественно равна нулю. Функция f, очевидно, непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица по u и x, так как не зависит от них. При замене s(t) в дифференциальном уравнении на 0 или 1 получим решения системы (56), (57) вида $(u_0, t^3\sin\frac{1}{t}+c)$; $(u_0, -t^3\sin\frac{1}{t}+c)$ при $t<0$, (u_0,c) при $t\geq 0$. При $c\neq 0$ уравнение $t^3\sin\frac{1}{t}=c$ при $t\in[-1,0)$ имеет конечное число решений (или не имеет решений вовсе). Следовательно, к любой точке $t\in[-1,+\infty)$ справа примыкает интервал, на котором нет точек входа функции x в множество K_1 (при $t\geq 0$ точек входа нет, так как $x(t)=c\neq 0$). При $c=0$ точки входа имеют вид $t=-\frac{1}{\pi n}, n\in\mathbb{N}$. В этом случае справа от любой точки $t\in[-1,+\infty)$ также можно указать интервал, на котором нет точек входа в K_1. Таким образом, условие локальной явности M-переключателя (34) выполнено, следовательно, выполнено условие (65). Так как $u(t)\equiv u_0$, выполнено условие (66). Наконец, при $t\in[-1,0)$

$$(f(t,s,\upsilon,\xi),\xi)\leq|3t^2\sin\frac{1}{t}-\cos\frac{1}{t}||\xi|\leq 4\sqrt{\xi^2};$$

мы получаем оценку с неубывающей осгудовской функцией, которая, конечно, справедлива для $t\geq 0$.

Итак, рассматриваемая система удовлетворяет условию глобальной теоремы. Следовательно, если $\varphi(t) = g_{t_0}^t(s_0, u_0, x_0)$, $\tau = \sup \mathcal{D}(\varphi)$, то $\tau = +\infty$ или $s(t)$ имеет бесконечно много скачков на $[t_0, \tau)$.

Покажем, что в данном случае $\tau = 0$. Нетрудно видеть, что при $t \in [-1, 0)$ решением рассматриваемой задачи Коши является функция $\varphi(t) = (s(t), u_0, x(t))$, где

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{\textit{при} } t \in [-1, -\frac{1}{\pi}] \text{ \textit{и} } t \in (-\frac{1}{2\pi n}, -\frac{1}{\pi(2n+1)}], \\ 1 & \text{\textit{при} } t \in (-\frac{1}{\pi(2n-1)}, -\frac{1}{2\pi n}]; \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} t^3 \sin\frac{1}{t} & \text{\textit{при} } t \in [-1, -\frac{1}{\pi}] \text{ \textit{и} } t \in (-\frac{1}{2\pi n}, -\frac{1}{\pi(2n+1)}], \\ -t^3 \sin\frac{1}{t} & \text{\textit{при} } t \in (-\frac{1}{\pi(2n-1)}, -\frac{1}{2\pi n}]. \end{cases}$$

Таким образом, $s(t)$ имеет бесконечно много скачков на $[-1, 0)$ в точках вида $t = -\frac{1}{\pi n}$, при этом $s(-\frac{1}{\pi(2n-1)}) = 0$, $s(-\frac{1}{2\pi n}) = 1$, т.е. функция $s(t)$ не имеет предела при $t \to -0$ и мы не можем доопределить решение в точке $t = 0$. Следовательно $\tau = 0$.

2.3 Замкнутая система с гистерезисным элементом типа упора

2.3.1 Постановка задачи

Рассматривается система (50), (51) и

$$\Delta u = E(t, u, \sigma_t^{t+dt}, dt) + o(dt) \tag{76}$$

с начальными условиями (11) и (52).

Предполагается, что:

$$\begin{gathered} \text{функция } f : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3 \to \mathbb{R}^n \\ \text{непрерывна по совокупности переменных,} \\ \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3 - \text{ окрестности точек } t_0, x_0 \text{ в } \mathbb{R} \text{ и } \mathbb{R}^n, \\ \text{соответственно, } \mathcal{D}_2 - \text{ некоторое множество в } \mathbb{R}^m; \end{gathered} \tag{77}$$

$$\text{функция } p : \mathcal{D}_3 \to \mathbb{R} \text{ непрерывна} \tag{78}$$

$$\begin{gathered}\text{функция } (t,u,\sigma,dt) \mapsto E(t,u,\sigma_t^{t+dt},dt)\\ \text{определена при } t \in \mathcal{D}_1, u \in \mathcal{D}_2, \sigma \in C[t_0,T]\\ (T \geq t_0 - \text{ фиксированный параметр}),\\ dt \in [0,+\infty), \text{ принимает значение в } \mathbb{R}^m\\ \text{и непрерывна по совокупности переменных } \sigma, dt;\end{gathered} \tag{79}$$

$$\begin{gathered}\text{при любой непрерывной функции } (\sigma(s) : t_0 \leq s \leq T)\\ \text{(76) является локально явным уравнением}\\ \text{с функцией } D(t,u,dt) = E(t,u,\sigma_t^{t+dt},dt).\end{gathered} \tag{80}$$

2.3.2 Теорема о локальной разрешимости

При выполнении условий (77)-(80) *задача* (11), (50)-(52), (76) *имеет* (*хотя бы одно*) *решение на некотором промежутке* $[t_0, t_0+h]$ $(h > 0)$.

Доказательство. Для любой непрерывной функции $x : [t_0,T] \to \mathcal{D}_3$ рассмотрим функцию $u(t) = u_0 + E(t_0,u_0,\sigma_{t_0}^t, t-t_0)$, где σ определяется по функции x формулой (51). Функция u является решением уравнения (76) на некотором промежутке $[t_0, t_0+\Delta)$, где Δ зависит от (t_0,u_0) и от выбора функции x и, следовательно, ее значения принадлежат $\mathcal{D}_2$. Поэтому уравнение (50) можно переписать в виде:

$$\dot{x} = \widetilde{f}(t, x_{t_0}^t), \tag{81}$$

где $\widetilde{f}(t,x_{t_0}^t) = f(t, u_0 + E[t_0,u_0,(p[x(\tau)] : t_0 \leq \tau \leq t), t-t_0], x(t))$.

В силу условий (77)-(80) функция $\widetilde{f}$ непрерывна по совокупности переменных t и x. Действительно, пусть $x_k \to \overline{x}$ в $C([t_0,T],\mathcal{D}_3)$, $t_k \to \overline{t}$. Покажем, что $\widetilde{f}(t_k,(x_k)_{t_0}^{t_k}) \to \widetilde{f}(\overline{t}, \overline{x}_{t_0}^t)$. Имеем:

$$\widetilde{f}(t_k,(x_k)_{t_0}^{t_k}) = f(t_k, u_0 + E[t_0,u_0,(\sigma_k)_{t_0}^{t_k}, t_k - t_0], x_k(t_k)),$$

$$\widetilde{f}(\overline{t}, \overline{x}_{t_0}^{\overline{t}}) = f(\overline{t}, u_0 + E[t_0, u_0, \overline{\sigma}_{t_0}^{\overline{t}}, \overline{t} - t_0], \overline{x}(\overline{t})).$$

Поскольку f непрерывна по совокупности трех переменных, а E – по совокупности двух последних переменных, достаточно показать, что $\sigma_k \to \overline{\sigma}$ в $C[t_0, T]$. Заметим, что совокупность значений функций x_k и $\overline{x}$ есть компакт в $\mathbb{R}^n$. Поэтому модуль непрерывности $\omega_p(\delta)$ функции p на нем стремится к нулю при $\delta \to 0$. Следовательно,

$$\|\sigma_k - \overline{\sigma}\| = \max_{t \in [t_0, T]} |p[x_k(t)] - p[\overline{x}(t)]| \le \omega_p(\|x_k - \overline{x}\|) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Нетрудно видеть, что задача (81), (52) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \widetilde{f}(s, x_{t_0}^{s}) ds. \tag{82}$$

Введем обозначение

$$(Jx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \widetilde{f}(s, x_{t_0}^{s}) ds.$$

Очевидно, $J : C([t_0, T], \mathcal{D}_3) \to C([t_0, T], \mathbb{R}^n)$. Покажем, что это отображение непрерывно. Непрерывная по t, x функция $\widetilde{f}(t, (x)_{t_0}^{t})$ на компакте $[t_0, T] \times (\{x_k\} \bigcup \overline{x})$ равномерно непрерывна. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при

$$\|x_k - \overline{x}\| < \delta \tag{83}$$

справедливо неравенство

$$\|\widetilde{f}(t, (x_k)_{t_0}^{t}) - \widetilde{f}(t, \overline{x}_{t_0}^{t})\| < \varepsilon \tag{84}$$

для всех $t \in [t_0, T]$. Выбрав K так, что при $k \ge K$ справедливо (83), получим, что для этих k при всех t выполнено (84), т.е. функции $\widetilde{f}(t, (x_k)_{t_0}^{t})$ равномерно по $t \in [t_0, T]$ сходятся к функции $\widetilde{f}(t, \overline{x}_{t_0}^{t})$. Следовательно, $(Jx_k) \to (J\overline{x})$. Непрерывность J доказана.

Через $\overline{x}_0$ будем обозначать функцию, тождественно равную x_0 на $[t_0, T]$. Так как функция $\widetilde{f}(t, (x)_{t_0}^t)$ непрерывна по t, x, то

$$\exists(\delta > 0)\forall(t : t - t_0 < \delta)\forall(x \in C[t_0, T] : \|x - \overline{x}_0\| < \delta)$$

$$[\|\widetilde{f}(t, (x)_{t_0}^t) - \widetilde{f}(t_0, (\overline{x}_0)_{t_0}^{t_0})\| \leq 1].$$

Рассмотрим шар $\overline{B}(\overline{x}_0, \delta) \subset C[t_0, T]$, где $T - t_0 < \delta$. Пусть $x \in \overline{B}(\overline{x}_0, \delta)$, тогда

$$\|Jx - \overline{x}_0\| \leq \int_{t_0}^{T} \|\widetilde{f}(s, x_{t_0}^s)\| ds \leq (1 + \|\widetilde{f}(t_0, (\overline{x}_0)_{t_0}^{t_0})\|)(T - t_0).$$

Выберем $T \leq \ \delta(1 + \|\widetilde{f}(t_0, (\overline{x}_0)_{t_0}^{t_0})\|)^{-1} + t_0$, тогда $Jx \in \overline{B}(\overline{x}_0, \delta)$.

Покажем, что семейство функции $\{Jx\}$ $(x \in \overline{B}(\overline{x}_0, \delta))$ равностепенно непрерывно на $[t_0, T]$. Пусть $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, тогда

$$\|(Jx)(t_1) - (Jx)(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\widetilde{f}(s, x_{t_0}^s)\| ds \leq$$

$$\leq \ (1 + \|\widetilde{f}(t_0, (\overline{x}_0)_{t_0}^{t_0})\|)(t_2 - t_1).$$

Следовательно, рассматриваемое семейство равностепенно непрерывно и, очевидно, равномерно ограничено. По теореме Арцела оно относительно компактно. Таким образом, отображение J вполне непрерывно и в силу принципа Шаудера имеет неподвижную точку x, которая является решением уравнения (81).

По указанному x найдем Δ. Пусть $h < \min\{\Delta, T - t_0\}$, тогда на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ пара функций $(u(t), x(t))$ является решением задачи (11), (50)-(52), (76). Теорема полностью доказана.

В виде (50), (51), (76) можно представить модели некоторых систем автоматического регулирования с гистерезисными элементами типа упора.

Как показано, преобразователь упора для произвольных непрерывных входов $\sigma(t)$ может быть описан с помощью локально явного уравнения (76) с функцией $E(t,u,\sigma_t^{t+dt},dt) = D(t,u,dt)$, где функция D имеет вид (21).

В этом случае функция $(t,u,\sigma,dt) \mapsto E(t,u,\sigma_t^{t+dt},dt)$, очевидно, непрерывна по совокупности переменных σ, dt. Таким образом рассматриваемая задача Коши локально разрешима.

2.4 О ψ-устойчивости решений обобщенных динамических систем

2.4.1 Определение и примеры обобщенных динамических систем

Как сказано во введении к данной главе, перед рассмотрением в параграфе 2.5 задачи об устойчивости "регулятора температуры" в этом параграфе будут описаны общие понятия и факты, относящиеся к понятиям ψ- и p-устойчивости решений обобщенных динамических систем.

Под *обобщенной динамической системой* будем понимать семейство A непрерывных функций, каждая из которых определена на некотором числовом промежутке $I \subset \mathbb{R}$ и принимает значения в пространстве $\mathbb{R}^n$. Входящие в A функции будем называть ее *решениями.*

Вопросы устойчивости для подобных абстрактных систем изучались, например, в [6], [20], [33].

(а) Множество решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x),$$

очевидно, образует обобщенную динамическую систему.

(б) Поскольку решением дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t,x)$$

(где $F(t,x)$ – множество, лежащее в $\mathbb{R}^n$), считается абсолютно непрерывная функция (см. [37],с.40; [1],с.120); множество всех его решений также образует обобщенную динамическую систему.

(в) Рассматривается локально явное уравнение

$$u(t+dt)-u(t)=D(t,u(t),dt)+o(dt).$$

Предположим, что функция $D(t,u,dt)$ по переменной dt непрерывна справа в точке $dt=0$: $D(t,u,dt)\to 0$ при $dt\to 0$. Тогда множество решений этого уравнения удовлетворяет определению обобщенной динамической системы.

(г) Рассматривается система с M-переключателем (см.2.2). Будем считать, что начальное состояние M-переключателя s_0 фиксировано, будем предполагать также, что правая часть в уравнении (56) непрерывна справа по dt в точке $dt=0$. Тогда множество функций $(u(t),x(t))$ образует обобщенную динамическую систему.

2.4.2 Определение ψ-устойчивости; примеры

Пусть $\overline{\varphi}:I\to\mathbb{R}^n$ – выделенное решение обобщенной системы A, $t_0\in I$ – начальный момент, $U_0=\{(t,a):t\in I,t\geq t_0,a\geq 0\}$, $\psi_0:U_0\longrightarrow[0,+\infty)$ – непрерывная функция, возрастающая (нестрого) по второму аргументу.

Будем говорить, что $\overline{\varphi}$ обладает свойством *ψ_0-устойчивости*, если

$\exists(\Delta>0)\ \forall(\varphi\in A)\ \forall(t\in\mathcal{D}(\varphi)\bigcap I:t\geq t_0)\ [\|\varphi(t_0)-\overline{\varphi}(t_0)\|<\Delta\Rightarrow \|\varphi(t)-\overline{\varphi}(t)\|\leq\psi_0(t,\|\varphi(t_0)-\overline{\varphi}(t_0)\|)]$.

Отметим, прежде всего, что для системы обыкновенных дифференциальных уравнений экспоненциально устойчивое решение является ψ_0-устойчивым с функцией $\psi_0(t,a)=Me^{-\gamma(t-t_0)}a$. Заметим также, что если $I=[t_0,+\infty)$ и $\psi_0(t,a)\to 0$ при $a\to 0$ равномерно относительно t, то из ψ_0-устойчивости вытекает устойчивость по

Ляпунову. Если, кроме того, $\psi_0(t,a) \to 0$ при $t \to +\infty$, то из ψ_0-устойчивости вытекает асимптотическая устойчивость.

Переходя к вопросу об устойчивости, равномерной относительно начального момента, введем еще одно обозначение $U = \{(t, t_1, a) : t, t_1 \in I, t \geq t_1, a \geq 0\}$. Пусть $\psi : U \longrightarrow [0, +\infty)$ – непрерывная функция, возрастающая (нестрого) по третьему аргументу.

Будем говорить, что $\overline{\varphi}$ обладает свойством *ψ-устойчивости, равномерной относительно начального момента* ([48],[49]), если
$\exists(\Delta > 0)\ \forall(\varphi \in A)\ \forall(t, t_1 \in \mathcal{D}(\varphi) \bigcap I : t \geq t_1)\ [\|\varphi(t_1) - \overline{\varphi}(t_1)\| < \Delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)\| \leq \psi(t, t_1, \|\varphi(t_1) - \overline{\varphi}(t_1)\|)]$.

Отметим, что из ψ-устойчивости, равномерной относительно начального момента, очевидно, вытекает ψ_0-устойчивость. Заметим также, что если $I = [t_0, +\infty)$ и $\psi(t, t_1, a) \to 0$ при $a \to 0$ равномерно относительно t, то из ψ-устойчивости, равномерной относительно начального момента, вытекает устойчивость, равномерная относительно начального момента.

Решения линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax,$$

как известно, допускают оценку

$$\|x(t)\| \leq M e^{\alpha(t-t_1)}(t-t_1)^{p-1}\|x(t_1)\|,$$

где α – максимальная вещественная часть собственных значений матрицы A, p – максимальная размерность ее жордановых клеток, соответствующих собственным значениям с вещественной частью α. В принятой здесь терминологии это означает, что имеет место ψ-устойчивость, равномерная относительно начального момента, с функцией

$$\psi(t, t_1, a) = M e^{\alpha(t-t_1)}(t-t_1)^{p-1}a.$$

Приведем еще несколько примеров.

Так как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -\frac{x}{t},$$

удовлетворяющее условию $x(1) = x_0$, имеет вид

$$x(t) = \frac{x_0}{t},$$

то его нулевое решение ψ_0-устойчиво на $[1, +\infty)$ с функцией $\psi_0 = a/t$.

Аналогично нетрудно убедиться, что нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = -\frac{2x \ln t}{t}$$

ψ_0-устойчиво на $[1, +\infty)$ с функцией $\psi_0 = a/t^{\ln t}$, уравнения

$$\dot{x} = -\sqrt[3]{x}$$

– с функцией $\psi_0 = [(a^{2/3} + \frac{2}{3}(1-t))_+]^{3/2}$ (где $y_+ = \max\{y; 0\}$), уравнения

$$\dot{x} = -x^3$$

– с функцией $\psi_0 = a(1 + 2a^2(t-1))^{-1/2}$, а уравнения

$$\dot{x} = \begin{cases} -1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

– с функцией $\psi_0 = [(a^2 + 2(1-t))_+]^{1/2}$. Так как во всех этих случаях $\psi_0(t, a) \to 0$ при $a \to 0$ равномерно относительно t и $\psi_0(t, a) \to 0$ при $t \to +\infty$, то имеет место асимптотическая устойчивость.

Нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = x \sin t$$

ψ-устойчиво равномерно относительно начального момента с функцией $\psi = ae^{\cos t_1 - \cos t}$, которая стремится к нулю при $a \to 0$ равномерно относительно t, т.е. имеет мемто устойчивость, равномерная относительно начального момента.

Нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = x$$

ψ_0-устойчиво с функцией $\psi_0 = ae^{t-t_0}$, которая стремится к нулю при $a \to 0$ не равномерно относительно t. Очевидно, нулевое решение этого уравнения неустойчиво.

Так как любое решение уравнения вида

$$\dot{x} = b(t)x|x|^p \ (p > 0)$$

удовлетворяет условию

$$|x|^p = \frac{|x_0|^p}{1 - p|x_0|^p \int_{t_0}^t b(s)ds},$$

то, при условии $\int_{t_0}^t b(s)ds \leq 0$ (которое гарантирует непрерывность и возрастание ψ_0), нулевое решение ψ_0-устойчиво с функцией

$$\psi_0 = \frac{a}{(1 - pa^p \int_{t_0}^t b(s)ds)^{1/p}}.$$

Если $\int_{t_0}^t b(s)ds \longrightarrow -\infty$ при $t \longrightarrow +\infty$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

2.4.3 Определение степенной устойчивости с показателем p; примеры; сравнение с экспоненциальной устойчивостью

Будем говорить, что $\overline{\varphi}$ обладает свойством *степенной устойчивости с показателем* p_0 (p_0-*устойчиво*), если
$\exists(p_0 > 0, \Delta > 0, M > 0)\ \forall(\varphi \in A)\ \forall(t \in \mathcal{D}(\varphi) \bigcap I : t > t_0)\ [\|\varphi(t_0 - \overline{\varphi}(t_0)\| < \Delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)\| \leq M/(t - t_0)^{p_0}]$.

Степенная, или p_0-устойчивость, очевидно, является частным случаем ψ_0-устойчивости – в этом случае функция $\psi_0(t, a)$ от a не зависит. Если обобщенная система рассматривается на $I = [t_0, +\infty)$

и обладает свойством непрерывной зависимости решений от начальных значений на конечных промежутках, то p_0-устойчивость влечет асимптотическую устойчивость.

Будем говорить, что $\overline{\varphi}$ обладает свойством *степенной устойчивости, равномерной относительно начального момента, с показателем p* (*p- равномерно устойчиво*), если
$\exists(p > 0, \Delta > 0, M > 0)\ \forall(\varphi \in A)\ \forall(t, t_1 \in \mathcal{D}(\varphi) \bigcap I : t > t_1)\ [\|\varphi(t_1 - \overline{\varphi}(t_1)\| < \Delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)\| \le M/(t-t_1)^p]$.

Очевидно, p- равномерная устойчивость является частным случаем ψ-устойчивости, равномерной относительно начального момента.

Как отмечалось выше, нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = -x^3$$

ψ_0-устойчиво с функцией $\psi_0 = a(1+2a^2(t-1))^{-1/2}$. Нетрудно видеть, что оно является p_0-устойчивым, $p_0 = \frac{1}{2}$.

Отметим, что из экспоненциальной устойчивости, равномерной относительно начального момента, следует степенная устойчивость, равномерная относительно начального момента, с любым показателем p. Действительно, если решение $\overline{\varphi}$ экспоненциально устойчиво, равномерно относительно начального момента, то

$$\exists(M > 0, \gamma > 0, \Delta > 0)\ \forall(\varphi \in A)\ \forall(t, t_1 \in \mathcal{D}(\varphi) \bigcap I : t \ge t_1)$$
$$[\|\varphi(t_1) - \overline{\varphi}(t_1)\| < \Delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)\| \le Me^{-\gamma(t-t_1)}\|\varphi(t_1) - \overline{\varphi}(t_1)\|].$$

Рассмотрим функцию $g(t) = (t - t_1)^p e^{-\gamma(t-t_1)}$. На промежутке $[t_1, +\infty)$ она имеет единственный экстремум: $t_{\max} = t_1 + p/\gamma$, $g(t_{\max}) = (p/(\gamma e))^p$. Таким образом, $g(t) \le (p/(\gamma e))^p$ при $t \ge t_1$. Следовательно, для любого $p > 0$

$$\exists(\Delta > 0, M_1 = M\Delta(p/(\gamma e))^p)\ \forall(\varphi \in A)\forall(t, t_1 \in \mathcal{D}(\varphi) \bigcap I : t \ge t_1)$$
$$\left[\|\varphi(t_1) - \overline{\varphi}(t_1)\| < \Delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)\| \le \frac{M_1}{(t-t_1)^p}\right].$$

2.4.4 Приведенная система

Наряду с обобщенной системой A рассмотрим систему $A_{\overline{\varphi}}$, состоящую из функций $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t) - \overline{\varphi}(t)$, где $\varphi \in A$, $t \in I \bigcap \mathcal{D}(\varphi)$. Обобщенную систему $A_{\overline{\varphi}}$ по отношению к A и заданному ее решению $\overline{\varphi}$ будем называть *приведенной*. Отметим, что области определения входящих в нее функций вложены в I.

Очевидно, решение $\overline{\varphi}$ обобщенной динамической системы A обладает одним из свойств устойчивости, если и только если соответствующим свойством обладает нулевое решение приведенной системы.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать приведенную обобщенную динамическую систему, которую будем обозначать просто A. Будем предполагать, что ее нулевое решение определенно на I.

2.4.5 Лемма о функции типа Ляпунова

Пусть для обобщенной системы существуют непрерывная скалярная функция $V(t,x)$ *и такие числа* $\gamma, r, b, H, \alpha > 0$, *что*:

1) $\forall((t,x) : t \in I, \|x\| \le H)\ [r\|x\|^b \le V(t,x)]$;

2) $\forall(\varphi \in A)\ \forall(t \in \mathcal{D}(\varphi))\ [\|\varphi(t)\| \le H \Rightarrow D_* V(t,\varphi(t)) \le -\gamma V^\alpha(t,\varphi(t))]$;

3) $V(t,x) \to 0$ *при* $x \to 0$ *равномерно относительно* t.

Тогда $\exists(\Delta > 0)\forall(\varphi \in A)\ \forall(t, t_1 \in \mathcal{D}(\varphi) : (t \ge t_1) \wedge (\|\varphi(t_1)\| < \Delta))$

$$\alpha > 1 \Rightarrow V^{\alpha-1}(t,\varphi(t)) \le \frac{V^{\alpha-1}(t_1,\varphi(t_1))}{1+\gamma(\alpha-1)(t-t_1)V^{\alpha-1}(t_1,\varphi(t_1))}, \tag{85}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow V(t,\varphi(t)) \le V(t_1,\varphi(t_1))e^{-\gamma(t-t_1)}, \tag{86}$$

$$\alpha < 1 \Rightarrow V^{1-\alpha}(t,\varphi(t)) \le [V^{1-\alpha}(t_1,\varphi(t_1)) - \gamma(1-\alpha)(t-t_1)]_+. \tag{87}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что

$$\exists(\Delta_1 > 0)\ \forall(\varphi \in A)\forall(t, t_1 \in \mathcal{D}(\varphi) : t \ge t_1)[\|\varphi(t_1)\| < \Delta_1 \Rightarrow \|\varphi(t)\| < H].$$

Действительно, в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим сферу S_H. Так как $V(t,x) \to 0$ при $x \to 0$ равномерно относительно t, то

$$\exists(\Delta_1 > 0)\ \forall(t \in I)\ \forall(x : \|x\| < \Delta_1)\ [V(t,x) < rH^b].$$

Покажем, что любое решение обобщенной системы, попадающее в Δ_1-окрестность нулевого решения, не покидает впоследствии его H-окрестности. Предположим противное, пусть φ – решение данной системы, для которого существуют такие $t_2 > t_1$, что $\|\varphi(t_1)\| < \Delta_1$, $\|\varphi(t_2)\| = H$. Так как, в силу условия 2) и теоремы 2.1.2, функция $V(t,\varphi(t))$ является невозрастающей, то

$$rH^b > V(t_1,\varphi(t_1)) \geq V(t_2,\varphi(t_2)) \geq rH^b.$$

Получили противоречие.

Таким образом, если решение φ обобщенной системы в некоторый момент времени t_1 попадает в Δ_1-окрестность нулевого решения, то $r\|\varphi(t)\|^b \leq V(t,\varphi(t))$ и $D_*V(t,\varphi(t)) \leq -\gamma V^\alpha(t,\varphi(t))$ при $t \geq t_1$.

Пусть φ – решение обобщенной системы, такое, что $\|\varphi(t_1)\| < \Delta \leq \Delta_1$. Отметим, что верхнее решение уравнения

$$\dot{v} = -\gamma v^\alpha,$$

удовлетворяющее условию $v(t_1) = v_1$, имеет вид: $\psi(t) = v_1(1+\gamma(\alpha-1)(t-t_1)v_1^{\alpha-1})^{1/(1-\alpha)}$ при $\alpha > 1$; $\psi(t) = v_1 e^{-\gamma(t-t_1)}$ при $\alpha = 1$; $\psi(t) = [(v_1^{1-\alpha}+\gamma(\alpha-1)(t-t_1))_+]^{1/(1-\alpha)}$ при $0 < \alpha < 1$. Введем обозначение $v(t) = V(t,\varphi(t))$. Из условия 2) по теореме о дифференциальном неравенстве следует, что при $t \geq t_1$ и $\alpha > 1$

$$v(t) \leq v_1(1+\gamma(\alpha-1)(t-t_1)v_1^{\alpha-1})^{1/(1-\alpha)},$$

или

$$V^{\alpha-1}(t,\varphi(t)) \leq \frac{V^{\alpha-1}(t_1,\varphi(t_1))}{1+\gamma(\alpha-1)(t-t_1)V^{\alpha-1}(t_1,\varphi(t_1))}.$$

Аналогично, для $\alpha = 1$ справедливо (86), а для $\alpha < 1$ – (87).
Замечание. *Если функция* V *удовлетворяет условиям* 1), 2) *и* $V(t_0, x) \to 0$ *при* $x \to 0$, *то* $\exists(\Delta > 0)\ \forall(\varphi \in A)\ \forall(t \in \mathcal{D}(\varphi) : (t \geq t_0) \wedge (\|\varphi(t_0)\| < \Delta))$

$$\alpha > 1 \Rightarrow V^{\alpha-1}(t, \varphi(t)) \leq \frac{V^{\alpha-1}(t_0, \varphi(t_0))}{1 + \gamma(\alpha - 1)(t - t_0)V^{\alpha-1}(t_0, \varphi(t_0))},$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow V(t, \varphi(t)) \leq V(t_0, \varphi(t_0))e^{-\gamma(t-t_0)},$$

$$\alpha < 1 \Rightarrow V^{1-\alpha}(t, \varphi(t)) \leq [V^{1-\alpha}(t_0, \varphi(t_0)) - \gamma(1 - \alpha)(t - t_0)]_+.$$

2.4.6 Теорема о ψ-устойчивости, равномерной относительно начального момента

Пусть для обобщенной системы существуют непрерывная скалярная функция $V(t, x)$ *и такие числа* $\gamma, r, R, b, H, \alpha > 0$, *что*:

1) $\forall((t, x) : t \in I, \|x\| \leq H)\ [r\|x\|^b \leq V(t, x) \leq R\|x\|^b]$;

2) $\forall(\varphi \in A)\ \forall(t \in \mathcal{D}(\varphi))\ [\|\varphi(t)\| \leq H \Rightarrow D_*V(t, \varphi(t)) \leq -\gamma V^\alpha(t, \varphi(t))]$.

Тогда нулевое решение обобщенной системы ψ*-устойчиво равномерно относительно начального момента, причем*
$\psi = c_0 a(1 + c_2(t - t_1)a^{bc_1})^{-1/bc_1}$ *при* $\alpha > 1$,
$\psi = c_0 a e^{-\frac{\gamma}{b}(t-t_1)}$ *при* $\alpha = 1$,
$\psi = [((c_0 a)^{-bc_1} + \gamma c_1(t - t_1))_+]^{1/bc_1}$ *при* $\alpha < 1$,
где $c_0 = (R/r)^{1/b}$; $c_1 = \alpha - 1$; $c_2 = \gamma c_1 r^{c_1}$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что все указанные функции возрастают по a.

Из условия 1) следует, что $V(t, x) \to 0$ при $x \to 0$ равномерно относительно t. Так как выполнены все условия леммы, то для любого решения φ обобщенной системы, попадающего в некоторый момент времени t_1 в Δ_1-окрестность нулевого решения, при $t \geq t_1$ справедливо в зависимости от α одно из неравенств (85) – (87). Откуда в силу условия теоремы 1) при $t \geq t_1$ и $\alpha > 1$:

$$r^{\alpha-1}\|\varphi(t)\|^{b(\alpha-1)} \leq \frac{R^{\alpha-1}\|\varphi(t_1)\|^{b(\alpha-1)}}{1+\gamma(\alpha-1)(t-t_1)r^{\alpha-1}\|\varphi(t_1)\|^{b(\alpha-1)}},$$

или

$$\|\varphi(t)\| \leq \frac{c_0\|\varphi(t_1)\|}{(1+c_2(t-t_1)\|\varphi(t_1)\|^{bc_1})^{1/bc_1}}$$

Таким образом, нулевое решение обобщенной системы ψ-устойчиво равномерно относительно начального момента с функцией

$$\psi(t,t_1,a) = \frac{c_0 a}{(1+c_2(t-t_1)a^{bc_1})^{1/bc_1}}.$$

Аналогично, для случаев $\alpha = 1$ и $\alpha < 1$.

Поскольку найденные функции стремятся к нулю при $a \to 0$ равномерно относительно t, *в условиях доказанной теоремы при* $I = [t_0, +\infty)$ *нулевое решение устойчиво равномерно относительно* t_0.

Замечание 1. *Если функция V удовлетворяет условию* 2) *теоремы и кроме того*

a) $V(t_0,x) \leq R\|x\|^b$ *при* $\|x\| \leq H$,

b) $\forall((t,x) : t \in I, \|x\| \leq H)$ $[r\|x\|^b \leq V(t,x)]$,

то нулевое решение обобщенной системы ψ_0-устойчиво, причем
$\psi_0(t,a) = c_0 a(1+c_2(t-t_0)a^{bc_1})^{-1/bc_1}$ *при* $\alpha > 1$,
$\psi_0(t,a) = c_0 a e^{-\frac{\gamma}{b}(t-t_0)}$ *при* $\alpha = 1$,
$\psi_0(t,a) = [((c_0 a)^{-bc_1} + \gamma c_1(t-t_0))_+]^{1/bc_1}$ *при* $\alpha < 1$.

Поскольку указанные функции стремятся к нулю как при $a \to 0$ (равномерно относительно t), так и при $t \to +\infty$, *в условиях замечания при* $I = [t_0, +\infty)$ *нулевое решение асимптотически устойчиво.*

Замечание 2. *Если в теореме* (*замечании* 1) *условие* 2) *заменить условием*:

2') $\forall(\varphi \in A)$ $\forall(t \in \mathcal{D}(\varphi) \bigcap I)$ $[\|\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)\| \leq H \Rightarrow D_* V(t, \varphi(t) - \overline{\varphi}(t)) \leq -\gamma V^\alpha(t, \varphi(t) - \overline{\varphi}(t))]$, *то ψ-устойчиво, равномерно относительно начального момента, (ψ_0-устойчиво) будет выделенное решение $\overline{\varphi}$.*

2.4.7 Теорема о p-равномерной устойчивости

Пусть для обобщенной системы существуют непрерывная скалярная функция $V(t,x)$ и числа $\gamma, r, b, H > 0$ и $\alpha > 1$, такие, что:

1) $\forall((t,x) : t \in I, \|x\| \leq H)$ $[r\|x\|^b \leq V(t,x)]$;

2) $\forall(\varphi \in A)$ $\forall(t \in \mathcal{D}(\varphi))$ $[\|\varphi(t))\| \leq H \Rightarrow D_*V(t,\varphi(t)) \leq -\gamma V^\alpha(t,\varphi(t))]$;

3) $V(t,x) \to 0$ *при* $x \to 0$ *равномерно относительно* t.

Тогда нулевое решение обобщенной системы p-равномерно устойчиво ($p = \frac{1}{(\alpha-1)b}$).

Доказательство. Так как выполнены все условия леммы, то для любого решения φ обобщенной системы, попадающего в некоторый момент времени t_1 в Δ_1-окрестность нулевого решения, при $t \geq t_1$ справедливо неравенство (85). Тогда при $t > t_1$

$$V^{\alpha-1}(t,\varphi(t)) \leq \frac{V^{\alpha-1}(t_1,\varphi(t_1))}{1+\gamma(\alpha-1)(t-t_1)V^{\alpha-1}(t_1,\varphi(t_1))} < \frac{1}{\gamma(\alpha-1)(t-t_1)}.$$

В силу условия 1)

$$r^{\alpha-1}\|\varphi(t)\|^{b(\alpha-1)} < \frac{1}{\gamma(\alpha-1)(t-t_1)} \qquad (t > t_1),$$

или

$$\|\varphi(t)\| < \frac{1}{(r^{\alpha-1}\gamma(\alpha-1)(t-t_1))^{1/b(\alpha-1)}} \qquad (t > t_1).$$

Следовательно, нулевое решение обобщенной системы p - равномерно устойчиво ($p = \frac{1}{(\alpha-1)b}$).

В условиях этой теоремы при $I = [t_0, +\infty)$ нулевое решение асимптотически устойчиво. Это следует из теоремы Ляпунова (см.[4], с.240), точнее, из ее известного обобщения, использующего нижнее правое производное число.

Замечание 1. Для p_0-устойчивости ($p_0 = \frac{1}{(\alpha-1)b}$) вместо условия 3) достаточно потребовать, чтобы $V(t_0, x) \to 0$ при $x \to 0$.

Для степенной устойчивости справедливо замечание, аналогичное замечанию 2 из предыдущего пункта.

2.4.8 Пример: система с вырожденной линейной частью

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^4, \\ \dot{y} = -y^3 + x^4. \end{cases}$$

Пусть $H = 1/4$, $V = x^2 + y^2$. Так как в нашем случае V является квадратом евклидовой нормы, а в $\mathbb{R}^2$ все нормы эквивалентны, то условие 1) теоремы о ψ-устойчивости равномерной относительно начального момента (а, следовательно и теоремы о p-равномерной устойчивости), очевидно, выполнено ($b = 2$). Проверим выполнения условия 2). В нашем случае $D_*V(t, \varphi(t)) = D_*V(\varphi(t))$ (где φ – решение рассматриваемой системы) ничто иное, как производная в силу системы, которую мы будем обозначать $\dot{V}$. Таким образом,

$$\dot{V} = -2x^2 + 2xy^4 - 2y^4 + 2yx^4.$$

Рассмотрим случаи:

а) $x \geq y > 0$, тогда

$$\dot{V} \leq -2x^2 - 2y^4 + 4x^5 \leq -2y^4 + 2x^2(-\frac{31}{32}) \leq -2y^4 - \frac{31x^4}{16} \leq -\frac{1}{4}V^2;$$

б) $y \geq x > 0$, тогда

$$\dot{V} \leq -2x^2 - 2y^4 + 4y^5 \leq -2x^2 + 2y^4(-\frac{1}{2}) \leq -2x^4 - y^4 \leq -\frac{1}{4}V^2.$$

В случае, когда $x < 0$ или $y < 0$, полученная оценка, очевидно, справедлива.

Таким образом, в силу доказанных теорем, нулевое решение p-равномерно устойчиво ($p = 0,5$) и ψ-устойчиво равномерно относительно начального момента ($\psi = 2a/(4 + (t - t_1)a^2)^{0,5}$).

2.5 ψ-устойчивость поведения "регулятора температуры"

2.5.1 Общий вид рассматриваемой системы

Изучаемая система "регулятора температуры" состоит из следующих трех уравнений, описывающих изменение состояния реле $s \in \{0,1\}$ и температуры x в зависимости от времени t.

Уравнение реле:

$$s(t+dt) \stackrel{*}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } x(t) \geq \alpha \text{ и } dt > 0, \\ 0, & \text{если } x(t) \leq \beta \text{ и } dt > 0, \\ s(t) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (88)$$

Уравнение нагревания: при $s = 0$

$$\dot{x} = f(t,x). \qquad (89)$$

Уравнение охлаждения: при $s = 1$

$$\dot{x} = -h(x). \qquad (90)$$

Будем предполагать, что:

$$\begin{gathered} \text{функции } f(t,x), h(x) \text{ непрерывны при} \\ \text{всех вещественных } t, x \text{ и принимают} \\ \text{значения в } [m, M], \text{ где } m > 0. \end{gathered} \qquad (91)$$

2.5.2 Решения системы

Рассмотрим систему (88)-(90) с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 < \alpha, \qquad (92)$$

$$s(t_0) = s_0 = 0. \qquad (93)$$

Из теоремы Пеано вытекает, что в некоторой правой окрестности точки t_0 существует решение X_0 задачи (89), (92). Такое решение, вообще говоря, не единственно. Однако в виду глобальной ограниченности функции f его можно продолжить на всю полуось $[t_0, +\infty)$, причем получившееся решение будет квалифицировано возрастающим, так как $\dot{X}_0 \geq m > 0$. Поэтому справа от точки t_0 существует единственная точка t_1, для которой $X_0(t_1) = \alpha$. Очевидно, пара функций $S(t) \equiv 0$, $X(t) = X_0(t)$ на $[t_0, t_1]$ является решением задачи (88)-(90), (92), (93). Далее, уравнение (90) с начальным условием $x(t_1) = \alpha$ имеет решение X_1, однозначно определяемое при любом вещественном t из равенства

$$-\int_{\alpha}^{x} \frac{d\xi}{h(\xi)} = t - t_1.$$

Поэтому имеется единственная точка t_2, в которой $X_1(t_2) = \beta$. Введем обозначение

$$d = -\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{h(\xi)} = t_2 - t_1.$$

Продолжим на $(t_1, t_2]$ функции S, X следующим образом: $S(t) = 1$, $X(t) = X_1(t)$; очевидно, при этом данная пара функций останется решением системы (88)-(90).

Правее точки t_2 до некоторой точки t_3 положим $S(t) = 0$, $X(t) = X_2(t)$, где X_2 – решение уравнения (89), удовлетворяющее условию $x(t_2) = \beta$; момент t_3 определяется равенством $X_2(t_3) = \alpha$. Описанный процесс последовательного расширения пары (S, X) продолжим до бесконечности – и получим решение системы (88)-(90), определенное на $[t_0, +\infty)$.

Если $s_0 = 1$, $x_0 > \beta$, то, проведя аналогичное построение, получим решение $(S(t), X(t))$ системы (88)-(90), определенное на $[t_0, +\infty)$. В этом случае при $t \in (t_{2i}, t_{2i+1}]$ $S(t) = 1$, X_{2i} – решения уравнения (90), удовлетворяющие при $i \geq 1$ условию $X_{2i}(t_{2i}) = \beta$; при $t \in (t_{2i+1}, t_{2i+2}]$ $S(t) = 0$, X_{2i+1} – решения уравнения (89), удовлетворяющие условию $X_{2i+1}(t_{2i+1}) = \alpha$; $d = t_{2i+1} - t_{2i}$.

В случае, когда $s_0 = 0$, $x_0 \geq \alpha$, мгновенно произойдет переключение, поэтому решения будут отличаться от описанных в предыдущем абзаце только тем, что $S(t_0)=0$. Если же $s_0=1$, $x_0\le\beta$ решения будут совпадать с решениями в случае $s_0=0$, $x_0<\alpha$ всюду за исключением точки t_0.

2.5.3 Постановка задачи о ψ_0-устойчивости

Пусть $(\overline{S},\,\overline{X})$ – фиксированное решение системы с областью определения $I=[t_0,+\infty)$; $\psi_0(t,a)$ – функция, определенная при $t\ge t_0$, $a\ge 0$ и нестрого возрастающая по a. Будем говорить, что решение $(\overline{S},\,\overline{X})$ ψ_0-устойчиво относительно возмущений $\overline{X}$ в момент $t=t_0$, если существует такое $\Delta>0$, что для любого определенного на I решения $(S,\,X)$ той же системы, удовлетворяющего условиям

$$S(t_0)=\overline{S}(t_0),\quad |X(t_0)-\overline{X}(t_0)|<\Delta, \tag{94}$$

выполняется неравенство

$$|X(t)-\overline{X}(t)|\le\psi_0(t,|X(t_0)-\overline{X}(t_0)|)\quad (t\in I). \tag{95}$$

Будем впредь для определенности считать, что

$$\overline{S}(t_0)=S(t_0)=0,\ \overline{X}(t_0)=\overline{x}_0<\alpha,\ X(t_0)=x_0<\alpha. \tag{96}$$

Если рассмотреть множество всех заданных на I решений $(S,$ $X)$ системы (88)-(90), (96), то соответствующие функции X образуют обобщенную динамическую систему в смысле определения 2.4.1. Сформулированное выше определение означает, что решение $\overline{X}$ этой системы ψ_0-устойчиво.

2.5.4 Об обратных уравнениях

Как отмечено в пункте 2.5.2, функции X_k, определяющие X на $I_k=[t_k,t_{k+1}]$, строго монотонны, и, следовательно, имеют обратные, которые мы будем обозначать T_k. В силу условия (96) T_{2i} есть

решение уравнения
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t,x)},$$
для которого
$$T_{2i}(\alpha) = t_{2i+1};$$
при $i \geq 1$
$$T_{2i}(\beta) = t_{2i},$$
а при $i = 0$
$$T_0(x_0) = t_0.$$

T_{2i+1} удовлетворяет уравнению
$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{h(x)}$$
и условиям
$$T_{2i+1}(\alpha) = t_{2i+1}, \quad T_{2i+1}(\beta) = t_{2i+2}.$$

В частности, это означает, что
$$T_{2i+1}(\beta) - T_{2i+1}(\alpha) = t_{2i+2} - t_{2i+1} = -\int_\alpha^\beta \frac{d\xi}{h(\xi)} = d.$$

Для выделенного решения $(\overline{S}, \overline{X})$ будем использовать аналогичные обозначения: $\overline{I}_k = [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}]$ $(k > 0)$, $\overline{I}_0 = [t_0, \bar{t}_1]$, $\overline{X}_k$, $\overline{T}_k$. Кроме того, введем обозначение $\bar{t}_0 = \overline{T}_0(x_0)$. Если $x_0 < \bar{x}_0$, то точка x_0 не входит в область значений функции $\overline{X}_0$ и, следовательно, в область определения $\overline{T}_0$; в этом случае предварительно продолжим $\overline{X}_0$ влево за точку t_0 как решение уравнения
$$\dot{x} = f(t,x)$$
(которое, очевидно, при $t \to -\infty$ строго монотонно стремится к $-\infty$).

2.5.5 Теорема о ψ_0-устойчивости $\overline{X}$

Предположим, что выполнено условие (91) *и следующее дополнительное условие: существует такое $H > 0$, что при любом целом $i \geq 0$ и любых t и x, удовлетворяющих неравенству*

$$|t - \overline{T}_{2i}(x)| \leq H, \tag{97}$$

выполняется неравенство

$$[f(t,x) - f(\overline{T}_{2i}(x), x)](t - \overline{T}_{2i}(x)) \geq q|t - \overline{T}_{2i}(x)|^{2\lambda}, \tag{98}$$

где λ и q некоторые положительные константы.

Тогда решение $(\overline{S}, \overline{X})$ ψ_0-устойчиво относительно возмущений $\overline{X}$ в момент t_0 с функцией ψ_0, которая в зависимости от λ имеет один из следующих трех видов:

при $\lambda > 1$

$$\begin{aligned} \psi_0(t,a) = \tfrac{c_1 a}{(1+c_2(t-t_0)a^{2(\lambda-1)})^{1/2(\lambda-1)}} \leq \\ \leq \tfrac{c_1}{c_2(t-t_0)^p} \quad (p = \tfrac{1}{2(\lambda-1)}); \end{aligned}$$

при $\lambda = 1$

$$\psi_0(t,a) = c_1 e^{-c_3(t-t_0)} a;$$

при $\lambda < 1$

$$\psi_0(t,a) = c_4[(a^{2(\lambda-1)} - c_5(t-t_0))_+]^{\frac{1}{2(\lambda-1)}},$$

где $c_1 - c_5$ – положительные константы.

Доказательство разобьем на 5 шагов. Шаг 1. Рассмотрим произвольное решение (S, X) системы (88)-(90), (92), (93). Для любого $t \geq t_0$ обозначим через $k = k(t)$ номер промежутка I_k, которому принадлежит t; для концов промежутков выбираем четные номера. Как и раньше, при необходимости продолжим влево функцию $\overline{X}_0$ как решение уравнения (89). Тогда

$$\begin{aligned} |X(t) - \overline{X}(t)| = |\overline{X}(\overline{T}_k(X(t))) - \overline{X}(T_k(X(t)))| \leq \\ \leq M|\overline{T}_k(X(t)) - T_k(X(t))|. \end{aligned} \tag{99}$$

Пусть, далее, $2i$ – наибольшие четное число, не превосходящее k, и $\hat{t}$ – ближайшее к t слева число отрезка I_{2i}. Если $\hat{t} = t$, то $k = 2i$ и

$$|X(t) - \overline{X}(t)| \leq M|\overline{T}_{2i}(X(\hat{t})) - T_{2i}(X(\hat{t}))|. \tag{100}$$

Последнее неравенство остается справедливым и в том случае, когда $\hat{t} < t$ (и $k = 2i + 1$). Действительно, тогда $X(\hat{t}) = \alpha$ и

$$|\overline{T}_{2i}(\alpha) - T_{2i}(\alpha)| = |\overline{T}_{2i+1}(\alpha) - T_{2i+1}(\alpha)| = |\overline{T}_{2i+1}(X(t)) - T_{2i+1}(X(t))|,$$

так как все функции T_k и $\overline{T}_k$ с нечетными номерами отличаются друг от друга на константу. Следовательно, (100) вытекает из (99).

Шаг 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{f(\tau + id, y - i(\alpha - \beta))}, \tag{101}$$

где

$$i = \left[\frac{y - \beta}{\alpha - \beta}\right]_+,$$

$$\left[\frac{y - \beta}{\alpha - \beta}\right]_+ = \begin{cases} 0, & \textit{если } y < \beta, \\ \left[\frac{y-\beta}{\alpha-\beta}\right] \ (\textit{целая часть}), & \textit{если } y \geq \beta. \end{cases}$$

Покажем, что функция

$$\theta(y) = T_{2i}(y - i(\alpha - \beta)) - id \tag{102}$$

при $y \geq x_0$ является непрерывным решением уравнения (101), в котором производная понимается как правая производная.

Действительно,

$$\frac{d_+\theta(y)}{dy} = \frac{d_+T_{2i}(y - i(\alpha - \beta))}{dy} = \left.\frac{d_+T_{2i}(x)}{dx}\right|_{x=y-i(\alpha-\beta)} \cdot \frac{d_+x}{dy} =$$

$$= \frac{1}{f(T_{2i}(y - i(\alpha - \beta)), y - i(\alpha - \beta))} = \frac{1}{f(\theta(y) + id, y - i(\alpha - \beta))}.$$

Проверим непрерывность функции θ. Достаточно проверить непрерывность слева, так как справа она дифференцируема. Пусть

$y \to y_0 - 0$; требуется доказать, что $\theta(y) \to \theta(y_0)$. Рассмотрим два случая. В первом случае пусть $\frac{y_0-\beta}{\alpha-\beta} = l \in \mathbb{N}$. Тогда $i(y_0) = l$, $i(y) = l-1$. Поэтому

$$\theta(y) = T_{2(l-1)}(y-i(\alpha-\beta))-(l-1)d \to T_{2(l-1)}(y_0-i(\alpha-\beta))-(l-1)d =$$

$$= T_{2(l-1)}(\alpha)-(l-1)d = T_{2l-1}(\alpha)-(l-1)d = T_{2l-1}(\beta)-d-(l-1)d =$$

$$= T_{2l-1}(\beta) - ld = \theta(y_0).$$

Во втором случае, когда $\frac{y_0-\beta}{\alpha-\beta}$ не является натуральным числом, при достаточно близких к y_0 значениях y $i(y) = i(y_0)$. Следовательно,

$$\theta(y) = T_{2i}(y - i(\alpha-\beta)) - id \to T_{2i}(y_0 - i(\alpha-\beta)) - id = \theta(y_0).$$

Утверждение полностью доказано.

Для выделенного решения $\overline{X}$ и соответствующих функций $\overline{T}_{2i}$ аналогично определим $\overline{\theta}$.

Шаг 3. Из (100) и (102) вытекает неравенство

$$|X(t) - \overline{X}(t)| \le M|\theta(X(\hat{t}) + i(\alpha-\beta)) - \overline{\theta}(X(\hat{t}) + i(\alpha-\beta))|. \quad (103)$$

Оценим величину $|\theta(y) - \overline{\theta}(y)|$ с помощью теоремы 2.4.6 (точнее, замечания 2 к этой теореме) и условия (98). Введем обозначение $x = y - i(\alpha-\beta)$. Функцию $V = z^2$ рассмотрим при $z = \theta(y) - \overline{\theta}(y)$ и оценим ее производную в силу уравнения (101):

$$\frac{dV}{dy} = 2(\theta(y) - \overline{\theta}(y))\left[\frac{1}{f(\theta(y)+id, x)} - \frac{1}{f(\overline{\theta}(y), x)}\right] =$$

$$= -\frac{2(\theta(y) - \overline{\theta}(y))[f(T_{2i}(x), x) - f(\overline{T}_{2i}(x), x)]}{f(T_{2i}(x), x) f(\overline{T}_{2i}(x), x)} \le$$

$$\le -\frac{2}{M^2}(T_{2i}(x) - \overline{T}_{2i}(x))[f(T_{2i}(x), x) - f(\overline{T}_{2i}(x), x)].$$

Если $|\theta(y) - \overline{\theta}(y)| = |T_{2i}(x) - \overline{T}_{2i}(x)| \le H$, то в силу условия (98)

$$\frac{dV}{dy} \le -\frac{2q}{M^2}|T_{2i}(x) - \overline{T}_{2i}(x)|^{2\lambda} =$$

$$= -\frac{2q}{M^2}((\theta(y) - \overline{\theta}(y))^2)^\lambda = -\frac{2q}{M^2}V^\lambda.$$

По теореме 2.4.6 существует такое $\Delta_1 > 0$, что при $|t_0 - \overline{t}_0| < \Delta_1$ и $y \geq x_0$ выполняется неравенство:

$$|\theta(y) - \overline{\theta}(y)| \leq \psi_0(y - x_0, |t_0 - \overline{t}_0|), \tag{104}$$

где функция ψ_0 в зависимости от λ ($\lambda > 1$, $\lambda = 1$, $0 < \lambda < 1$) имеет один из указанных в этой теореме видов.

Поскольку каждая из трех функции ψ_0 в теореме убывает по первому аргументу и возрастает по второму, для завершения доказательства достаточно установить оценки

$$\widehat{y} - x_0 \geq c(t - t_0) \quad (\text{где } \widehat{y} = X(\widehat{t}\ ) + i(\alpha - \beta)), \tag{105}$$

$$|t_0 - \overline{t}_0| \leq \frac{1}{m}|x_0 - \overline{x}_0|. \tag{106}$$

Шаг 4. Неравенство (105) докажем отдельно для трех случаев: $k = 0$, $k = 1$, $k > 1$. В первом случае

$$t - t_0 = \widehat{t} - t_0 = \theta[X(\widehat{t}\ )] - \theta[X(t_0)] \leq \frac{1}{m}(\widehat{y} - x_0),$$

т.е неравенство (105) выполнено с $c = m$.

В случае $k = 1$

$$t - t_0 = \widehat{t} - t_0 + t - \widehat{t} = \theta(\widehat{y}) - \theta(x_0) + t - \widehat{t} \leq \frac{1}{m}(\widehat{y} - x_0) + \frac{t - \widehat{t}}{t - t_0}(t - t_0).$$

Следовательно,

$$\widehat{y} - x_0 \geq m(t - t_0)\left(1 - \frac{t - \widehat{t}}{t - t_0}\right). \tag{107}$$

Оценим разность $t - t_0$ снизу:

$$t - t_0 = \theta(\alpha) - \theta(x_0) + t - \widehat{t} \geq \frac{1}{M}(\alpha - x_0) + t - \widehat{t}.$$

При выборе величины Δ, фигурирующей в определении ψ_0-устойчивости, будем считать, что

$$\Delta \leq \frac{\alpha - \overline{x}_0}{2}.$$

Тогда
$$\alpha - x_0 \geq \alpha - \overline{x}_0 - |x_0 - \overline{x}_0| \geq \frac{\alpha - \overline{x}_0}{2}.$$
Следовательно,
$$\frac{t - \widehat{t}}{t - t_0} \leq \frac{2M(t - \widehat{t})}{\alpha - \overline{x}_0 + 2M(t - \widehat{t})}.$$
Заметим, что дробь в правой части последнего неравенства растет с ростом $t - \widehat{t}$. Поскольку $t - \widehat{t} \leq d$, отсюда и из (107) получаем, что неравенство (105) выполнено с
$$c = m\left(1 - \frac{2Md}{\alpha - \overline{x}_0 + 2Md}\right).$$

Пусть теперь $k > 1$. Оценим величину $t - t_0$ сверху следующим образом
$$t - t_0 = (t_1 - t_0) + \sum_{j=1}^{i}(t_{2j} - t_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{i-1}(t_{2j+1} - t_{2j}) + (\widehat{t} - t_{2i}) + (t - \widehat{t}\,) =$$
$$= (\theta(\alpha) - \theta(x_0)) + id + \sum_{j=1}^{i-1}[\theta(\alpha(j+1) - j\beta) - \theta(j\alpha - (j-1)\beta)] +$$
$$+[\theta(\widehat{y}) - \theta(i\alpha - (i-1)\beta)] + (t - \widehat{t}\,) = id + \theta(\widehat{y}) - \theta(x_0) + (t - \widehat{t}\,) \leq$$
$$\leq \frac{1}{m}(\widehat{y} - x_0) + id + (t - \widehat{t}) = \frac{1}{m}(\widehat{y} - x_0) + \frac{id + t - \widehat{t}}{t - t_0}(t - t_0),$$
здесь учтено, что $t_{l+1} - t_l = d$ при нечетном l, а при четном $t_{l+1} - t_l = t_{2j+1} - t_{2j} = T_{2j}(\alpha) - T_{2j}(\beta) = \theta(\alpha(j+1) - j\beta) - \theta(j\alpha - (j-1)\beta)$ $(1 \leq j)$. Далее, оценим $t - t_0$ снизу
$$t - t_0 = T_0(\alpha) - T_0(x_0) + id + \sum_{j=1}^{i-1}[T_{2j}(\alpha) - T_{2j}(\beta)] + (t - \widehat{t}\,) \geq$$
$$\geq \frac{1}{M}(\alpha - x_0) + id + (i-1)\frac{1}{M}(\alpha - \beta) + (t - \widehat{t}\,).$$
Выберем Δ, фигурирующее в определении ψ_0-устойчивости, так же, как в предыдущем случае. Тогда $\alpha - x_0 \geq \frac{\alpha - \overline{x}_0}{2}$ и
$$t - t_0 \geq \frac{1}{2M}(\alpha - \overline{x}_0) + id + (i-1)\frac{1}{M}(\alpha - \beta) + (t - \widehat{t}\,).$$

Следовательно,

$$\frac{id+(t-\widehat{t})}{t-t_0} \le \frac{id+(t-\widehat{t})}{\frac{1}{2M}(\alpha-\overline{x}_0)+id+(i-1)\frac{1}{M}(\alpha-\beta)+(t-\widehat{t}\ )}.$$

Если $i=1$, то

$$\frac{id+(t-\widehat{t})}{t-t_0} \le \frac{d+(t-\widehat{t})}{\frac{1}{2M}(\alpha-\overline{x}_0)+d+(t-\widehat{t}\ )} \le \frac{4Md}{(\alpha-\overline{x}_0)+4Md} < 1.$$

Таким образом, неравенство (105) выполнено с

$$c = m\left(1-\frac{4Md}{\alpha-\overline{x}_0+4Md}\right).$$

Если $i \ge 2$, то

$$\frac{id+(t-\widehat{t})}{t-t_0} \le \frac{2M(i+1)d}{(\alpha-\overline{x}_0)+2M(i+1)d+2(i-1)(\alpha-\beta)} \le$$

$$\le \frac{2Md}{2Md+\frac{2(i-1)}{i+1}(\alpha-\beta)} \le \frac{2Md}{2Md+\frac{2}{3}(\alpha-\beta)} < 1.$$

$$c = m\left(1-\frac{3Md}{(\alpha-\beta)+3Md}\right).$$

Следовательно неравенство, (105) выполнено в любом случае с положительной константой c.

Шаг 5. Для $|t_0-\overline{t}_0|$ справедлива оценка:

$$|t_0-\overline{t}_0| \le |\overline{T}_0(\overline{x}_0)-\overline{T}_0(x_0)| \le \frac{1}{m}|x_0-\overline{x}_0|.$$

Положим $\Delta=\min\{\frac{\alpha-\overline{x}_0}{2}, m\Delta_1\}$. Тогда при $|x_0-\overline{x}_0|<\Delta$ будет $|t_0-\overline{t}_0|<\Delta_1$ и, следовательно, справедливо неравенство (104). Вместе с оценками (103), (105) и (106) это дает:

$$|X(t)-\overline{X}(t)| \le M\psi_0(c(t-t_0), \frac{1}{m}|x_0-\overline{x}_0|).$$

Теорема полностью доказана.

2.5.6 Пример

Пусть в системе (88)-(90) $\beta = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, функции f и h заданы формулами:

$$f(t,x) = 1 + \frac{1}{2}\sin^{\varkappa}(t-x), \quad h(x) = 1;$$

$\varkappa$ – одно из трех чисел $3, \frac{1}{3}$ или 1. Нетрудно проверить, что

$$\overline{X}(t) = \arcsin\sin t = \begin{cases} t - 2i\pi, & \text{если } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] + 2i\pi, \\ -t + (2i+1)\pi, & \text{если } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] + (2i+1)\pi \end{cases}$$

является решением обобщенной динамической системы. Обратная функция на участке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] + 2\pi i$ имеет вид $\overline{T}_{2i}(x) = x + 2i\pi$. С помощью теоремы 2.5.5 исследуем это решение на устойчивость. Условие (91), очевидно, выполнено. Проверим справедливость неравенства (98). Имеем:

$$[f(t,x) - f(\overline{T}_{2i}(x), x)](t - \overline{T}_{2i}(x)) = \frac{1}{2}\sin^{\varkappa}(t-x)[t - x - 2i\pi] =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{\varkappa}(t - x - 2i\pi)[t - x - 2i\pi].$$

Если $|t - \overline{T}_{2i}(x)| \le H = \frac{\pi}{2}$, то $|\sin(t - \overline{T}_{2i}(x))| \ge \frac{2}{\pi}|t - \overline{T}_{2i}(x)|$ и последнее выражение не меньше

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\varkappa}|t - \overline{T}_{2i}(x)|^{1+\varkappa} = q|t - \overline{T}_{2i}(x)|^{2\lambda},$$

где $\lambda = \frac{1+\varkappa}{2}$. Итак, условия теоремы из предыдущего пункта выполнены.

Поэтому существует такое $\Delta > 0$, что если $|X(0) - \overline{X}(0)| = |X(0)| < \Delta$ и $S(0) = 0$, то $|X(t) - \overline{X}(t)| \le \psi_0(t, |X(0)|)$ $(t \ge 0)$.

В случае $\varkappa = 3$ $\qquad \psi_0(t,a) = \dfrac{c_1}{\sqrt{1 + c_2 t a^2}} \le \dfrac{c_1}{\sqrt{c_2 t}};$

$\varkappa = 1$ $\qquad \psi_0(t,a) = c_1 e^{-c_3 t} a;$

$\varkappa = \dfrac{1}{3}$ $\qquad \psi_0(t,a) = c_4[(a^{-\frac{2}{3}} - c_5 t)_+]^{-\frac{3}{2}}.$

На рисунках для указанных трех случаев изображены графики выделенного решения (зеленый нижний – состояние реле, красный – температура) и решения с начальными значениями $S(0) = 0$, $X(0) = -\frac{\pi}{2}$ (зеленый верхний, синий); в последнем случае с некоторого момента решения совпадают.

Список литературы

[1] Введение в теорию многозначных отображений и диффференциальных включений / Ю.Г. Борисович [и др.]. – М. : КомКнига, 2005. – 216 с.

[2] Ватолкин М.Ю. О представлении решений квазидифференциального уравнения / М.Ю. Ватолкин // Изв. вузов. Матем. – 1995. - № 10. – С. 27-34.

[3] Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М. : ИЛ, 1962. – 896 с.

[4] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 332 с.

[5] Завалищин С.Т. Специальные нелинейные дифференциальные уравнения в обобщенных функциях / С.Т. Завалищин // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. 1316-1323.

[6] Зубов В.И. Устойчивость движения / В.И. Зубов. – М. : Высшая школа, 1984. – 232 с.

[7] Зубов С.В. Устойчивость периодических решений в системах с гистерезисом / С.В. Зубов // Нелинейный анализ и его приложения : тез. докл. междунар. конгр, Москва, 1-5 сент. 1998 г. – М., 1998. – С. 293-307.

[8] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. – М. : Мир, 1971. – 392 с.

[9] Красносельский А.М. О континуумах циклов в системах с гистерезисом / А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский // Доклады РАН. – 2001. – Т. 378, № 3. – С. 314-319.

[10] Красносельский М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. – М. : Наука, 1983. – 272 с.

[11] Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М. : Наука, 1966.– 332 с.

[12] Любопытнова О.Л. К теореме Осгуда о единственности решения задачи Коши / О.Л. Любопытнова, Б.Н. Садовский // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1213-1216.

[13] Мельник Т.А. Обощение теоремы А.Н. Тихонова для квазидифференциальных уравнений / Т.А. Мельник, В.А. Плотников // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 8. – С. 1030-1034.

[14] Мельник Т.А. Итерационный метод решения смстем квазидифференциальных уравнений с медленными и быстрыми переменными / Т.А. Мельник // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 10. – С. 1329-1333.

[15] Миллер Б.М. Задача нелинейного импульсного управления объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями с мерой. Ч. 1 / Б.М. Миллер // Автомат.и телемех. – 1978. - № 1. – С. 75-85.

[16] Миллер Б.М. Задача нелинейного импульсного управления объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями с мерой. Ч. 2 / Б.М. Миллер // Автомат.и телемех. – 1978. - № 3. – С. 34-42.

[17] Миллер Б.М. Обобщенные решения в нелинейных задачах оптимизации с импульсными управлениями. I. Проблема существования решения / Б.М. Миллер // Автомат.и телемех. – 1995. - № 4. – С. 62-76.

[18] Миллер Б.М. Обобщенные решения в нелинейных задачах оптимизации с импульсными управлениями. II. Представление решений с помощью дифференциальных уравнений с мерой / Б.М. Миллер // Автомат.и телемех. – 1995. - № 5. – С.56-70.

[19] Мильман В.Д. Об устойчивости движения при наличии толчков / В.Д. Мильман, А.Д. Мышкис // Сиб. мат. ж. – 1960. - № 2 – С. 233-237.

[20] Мовчан А.А. Устойчивость процессов по двум метрикам / А.А. Мовчан // Прикл. мат. и мех. – 1960. - Т. 24, – С. 988-1001.

[21] Мышкис А. Д. Бушующие динамические системы. I. Особые точки на плоскости / А. Д. Мышкис, А. Я. Хохряков // Мат. сб. – 1958. – Т. 45, № 3. – С. 401–414.

[22] Панасюк А.И. Об одном уравнении, порождаемом дифференциальным включением / А.И. Панасюк, В.И. Панасюк // Мат. заметки. – 1980. – Т. 27, № 3. – С. 429-436.

[23] Панасюк А.И. Квазидифференциальные уравнения в метрических пространствах / А.И. Панасюк // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 8. – С. 1344-1353.

[24] Панасюк А.И. Свойства решений квазидифференциального аппроксимационного уравнения и уравнение интегральной воронки / А.И. Панасюк // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 9. – С. 1537-1544.

[25] Панасюк А.И. Квазидифференциальные уравнения в полном метрическом пространстве в условиях типа Каратеодори. Ч. 1 / А.И. Панасюк // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 6. – С. 962-972.

[26] Панасюк А.И. Квазидифференциальные уравнения в полном метрическом пространстве в условиях типа Каратеодори. Ч. 2 / А.И. Панасюк // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 8. – С. 1361-1369.

[27] Панасюк А.И. Свойства решений квазидифференциального уравнения в полном метрическом пространстве и уравнение интегральной воронки / А.И. Панасюк // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 9. – С. 1488-1492.

[28] Панасюк А.И. Применение квазидифференциальных уравнений к описанию разрывных процессов / А.И. Панасюк, ДЖ. Бентсман // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 10. – С. 1339-1348.

[29] Плотников В.А. Усреднение квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах / В.А. Плотников, Л.И. Плотникова // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т.31, № 10. – С. 1678-1683.

[30] Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В.Покорный // Докл. АН. – 1999. – Т. 364, № 2. -С. 167-169.

[31] Прядко И.Н. Об одном способе построения направляющей функции / И.Н. Прядко // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1999. – С. 141-144.

[32] Прядко И.Н. Об использовании оператора сдвига для построения направляющих функций / И.Н. Прядко // Воронежская зимняя математическая школа "Современный анализ и его при-

ложения": тез. докл, Воронеж, 28 янв. - 4 февр. 2000 г. – Воронеж, 2000. – С. 143.

[33] Прядко И.Н. Некоторые варианты теоремы Ляпунова и Персидского / И.Н. Прядко // Нелинейный анализ и функционально - дифференциальные уравнения: тез. докл. МНК АДМ, Воронеж, 15-20 мая 2000 г. – Воронеж, 2000. – С. 171-172.

[34] Садовский Б.Н. О квазипотоках / Б.Н. Садовский // Тез. докл. конф, Воронеж, 26-29 апреля 1995 г. – Воронеж: ВГУ, 1995. – С. 80

[35] Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. – Киев : Вища шк., 1987. – 286 с.

[36] Сесекин А. Н. Динамические системы с нелинейной импульсной структурой / А. Н. Сесекин // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. – 2000. – 6, № 1-2. – С. 497-514.

[37] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 223 с.

[38] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.

[39] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М. : Наука, 1965. – 328 с.

[40] Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного : в 2 ч. / Г.Е. Шилов. – М. : Наука, 1969. – 528 с.

[41] Шин Д.Ю. О решение линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка/ Д.Ю. Шин // Мат. сб. – Т. 7, № 3. – С. 479-532

[42] Carathéodory C. Vorlesungen über reelle Funkionen / C. Carathéodory. – Leipzig, 1927.

[43] Kloeden P.E. Quasi-flows and equations with nonlinear differentials / P.E. Kloeden, B.N. Sadovsky, I.E. Vasilyeva // Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. – 2002. – 51 – P. 1143-1158.

[44] Kurbatov V.G. Functional Differential Operators and Equations / V.G. Kurbatov. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1999.

[45] *Pandit S.G., Deo S.G.* Differential systems involving impulses // Lect. Notes Math. 1982. Vol.954. 102p.

[46] *Schwabik S.* Generalized differential equations: Special Results, Rozpravy CZAV (rada MPV), 1989, 99, 3, Academia Praga. 80p.

[47] Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications / S.T. Zavalishchin, A.N. Sesekin. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997. – 268 p.

[48] Прядко И.Н. ψ-устойчивость / И.Н. Прядко // Труды математического факультета вып. 5 (новая серия) : сб. науч. тр. / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 2001. – С. 161.

[49] Прядко И.Н. О некоторых вариантах понятия устойчивости / И.Н. Прядко // Воронежская зимняя математическая школа: тез. докл. – Воронеж, 2002. – С. 71.

[50] Прядко И.Н. О моделировании некоторых гистерезисных элементов локально явными уравнениями / И.Н. Прядко, Б.Н. Садовский // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. конф, 30 июня-4 июля, Воронеж, 2003 г. – Воронеж, 2003. – С. 196-197.

[51] Прядко И.Н. О локально явных моделях некоторых негладких систем / И.Н. Прядко, Б.Н. Садовский // Автомат. и телемех. – 2004. - №10. – С. 40-50.

[52] Pryadko I.N. On the Cauchy problem for systems containing locally explicit equations / I.N. Pryadko // Z. Anal. und Anwend. – 2004. – 23, № 4. – P. 819–824.

[53] Pryadko I.N. and Sadovsky B.N. On locally explicit equations and systems with switching / I.N. Pryadko and B.N. Sadovsky // Func. Diff. Equat. – 2006. – 13 , № 3-4. – P. 571–584.

[54] Прядко И.Н. Пример моделирования существенно разрывного процесса с помощью локально явного уравнения / И.Н. Прядко // Воронежская зимняя Математическая школа С.Г. Крейна : тез. докл, Воронеж, 2006 г. – Воронеж : ВорГУ, 2006. – С. 84.

[55] Прядко И.Н. Об одной системе, описываемой локально явными уравнениями / И.Н. Прядко // Труды математического факультета вып. 10 (новая серия): сб. науч. тр. / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : Научная книга, 2006. – С. 131-135.