Необходимо подчеркнуть, что в случае разрывных характеристик операторы $\overline{B\mathfrak{f}}$ и $B\,\overline{\mathfrak{f}}$, как правило, различны.

б. При рассмотрении более сложных блок-схем, содержащих несколько звеньев с разрывными характеристиками, возникает потребность в новых операциях замыкания и овыпукливания. Это связано с необходимостью учета малых шумов не только на входе и выходе системы, но и во внутренних каналах передачи информации.

Рассмотрим в качестве важного примера систему W, которая является каскадным соединением двух функциональных звеньев $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ с борелевыми (mod 0) характеристиками $f(t, u)$, $g(t,x)$ $(t \in \Omega,\ u \in R^N,\ x \in R^M)$ и одного линейного вполне непрерывного звена B. Пусть для определенности входы и выходы всех звеньев системы W рассматриваются как элементы соответствующих пространств L_2, а малость шумов понимается как малость норм возмущений входов. Оператор $\overline{\overline{W}}$, описывающий функционирование системы W с учетом малых шумов, должен сопоставлять каждому фиксированному входу $u_0(t)$ множество пределов в L_2 всех сходящихся последовательностей вида

$$z_n(t) = Bg\,\{t, f[t, u_0(t) + \xi_n(t)] + \eta_n(t)\},$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n(t)\| = \lim_{n\to\infty} \|\eta_n(t)\| = 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$\overline{\overline{W}} = B\,\mathfrak{h}^{\square}, \tag{27.24}$$

где $\mathfrak{h}$ — оператор суперпозиции с многозначной характеристикой

$$h(t, u) = \overline{g}_u[t, \overline{f}_u(t, u)] \quad (t \in \Omega,\ u \in R^N).$$

Переход от оператора $B\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}$ к оператору (27.24) естественно назвать *замыканием, отвечающим каскадному соединению звеньев* $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ *и* B. Интересно отметить, что в общем случае оператор (27.24) не совпадает ни с оператором $B\,\mathfrak{g}^{\square}\,\mathfrak{f}^{\square}$, ни с оператором $B\,\mathfrak{f}_1^{\square}$, где $f_1(t, u) = g[t, f(t, u)]$.

§ 28. РЕЛЕ

28.1. Идеальное реле. Один и тот же термин *идеальное реле с пороговым значением* α употребляют для обозначения двух различных функциональных звеньев: звена $r_-(\alpha)$ с характеристикой

$$r_-(u, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u \leqslant \alpha, \\ 1, & \text{если} \quad u > \alpha, \end{cases} \tag{28.1}$$

и звена $r_+(\alpha)$ с характеристикой

$$r_+(u, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u < \alpha, \\ 1, & \text{если} \quad u \geqslant \alpha. \end{cases} \tag{28.2}$$

Характеристики (28.1) и (28.2) определяют операторы суперпозиции $r_-(\alpha)$ и $r_+(\alpha)$; их также называют *идеальными реле*. Каждый из этих операторов действует из любого L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ в пространство L_∞.

Характеристики (28.1) и (28.2) имеют одинаковое замыкание

$$\bar{r}(u,\alpha) = \bar{r}_u(u,\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u < \alpha, \\ \text{множество из двух точек 0 и 1}, & \\ & \text{если} \quad u = \alpha, \\ 1, & \text{если} \quad u > \alpha, \end{cases} \tag{28.3}$$

и овыпукливание

$$r^{\square}(u,\alpha) = r_u^{\square}(u,\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u < \alpha, \\ \text{промежуток } [0,1], & \text{если} \quad u = \alpha, \\ 1, & \text{если} \quad u > \alpha. \end{cases} \tag{28.4}$$

Для исследования идеальных реле применимы все теоремы этой главы, так как обе характеристики (28.1) и (28.2) борелевы.

Идеальные реле с характеристиками (28.1) и (28.2) вполне монотонны. Их замыкания и овыпукливания (т.е. функциональные звенья с характеристиками (28.3) и (28.4)) монотонны, но не обладают свойством полной монотонности.

28.2. Неидеальное реле. Начиная с этого пункта и до конца параграфа рассматриваются только преобразователи, у которых вход $u(t)$ и выход $x(t)$ являются скалярными функциями времени t.

Рассматриваемые ниже неидеальные реле не являются функциональными звеньями. Неидеальные реле – это простые и одновременно наиболее важные преобразователи, входо-выходные соответствия которых описываются разрывными операторами.

Областью $\Omega(\alpha,\beta) = \Omega(R(\alpha,\beta))$ *возможных состояний неидеального реле* $R(\alpha,\beta)$ *с пороговыми числами* α *и* β $(\beta < \alpha)$ *является множество точек* $\{u, x\}$ плоскости, лежащих на двух полупрямых: $x = 0$ при $u < \alpha$ и $x = 1$ при $u > \beta$. На рис. 28.1 множество $\Omega(\alpha,\beta)$ показано утолщенными линиями.

Иногда состояние неидеального реле определяют как значение выхода; множество возможных состояний содержит тогда два элемента: 0 и 1. Для нашего изложения такая точка зрения менее удобна.

При каждом начальном состоянии $\{u_0, x_0\} \in \Omega(\alpha,\beta)$ в момент времени $t = t_0$ допустимыми являются непрерывные входы $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$, удовлетворяющие условию

$$u(t_0) = u_0. \tag{28.5}$$

Допустимому входу $u(t)$ отвечает выход

$$x(t) = R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t) \quad (t \geqslant t_0), \tag{28.6}$$

который можно описывать различными

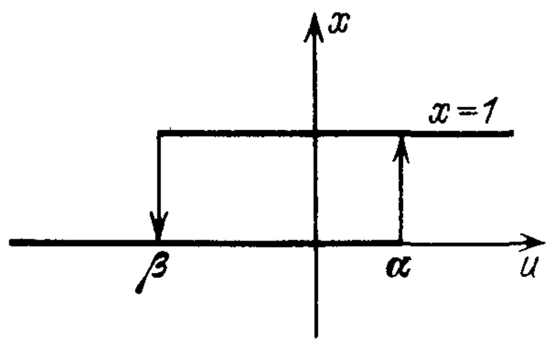


Рис. 28.1.

способами. Наиболее просто воспользоваться явной (хотя и весьма громоздкой) формулой

$$x(t)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad u(t)\leqslant\beta, \\ 1, & \text{если} \quad u(t)\geqslant\alpha, \\ x_0, & \text{если} \quad u(\tau)\in(\beta,\alpha) \text{ при всех } \tau\in[t_0,t], \\ 0, & \text{если} \quad u(t)\in(\beta,\alpha) \text{ и найдется такое } t_1\in[t_0,t), \\ & \qquad \text{что } u(t_1)=\beta \text{ и } u(\tau)\in(\beta,\alpha) \text{ при всех } \tau\in[t_1,t], \\ 1, & \text{если} \quad u(t)\in(\beta,\alpha) \text{ и найдется такое } t_1\in[t_0,t), \\ & \qquad \text{что } u(t_1)=\alpha \text{ и } u(\tau)\in(\beta,\alpha) \text{ при всех } \tau\in[t_1,t]. \end{cases} \tag{28.7}$$

Таким образом, неидеальное реле является детерминированным преобразователем, определенным на всех непрерывных входах. Очевидны статичность и управляемость неидеального реле. Полугрупповое тождество для неидеального реле имеет обычный вид:

$$R[t_0,x_0;\alpha,\beta]u(t)=R[t_1,R[t_0,x_0;\alpha,\beta]u(t_1);\alpha,\beta]u(t) \quad (t_0\leqslant t_1\leqslant t). \tag{28.8}$$

Значения выхода (28.7) при непрерывном входе $u(t)$ $(t\geqslant t_0)$ полностью определяются следующим правилом: выход $x(t)$ принимает постоянное значение на замкнутом промежутке $[t_1,t_2]$, если либо $x(t_1)=0$ и $u(t)<\alpha$ при $t\in[t_1,t_2]$, либо $x(t_1)=1$ и $u(t)>\beta$ при $t\in[t_1,t_2]$. Сформулированное правило будем называть *принципом отсутствия лишних переключений.*

Важным свойством неидеального реле является его *монотонность по входам*: если $\{u(t_0),\ x_0\}$, $\{v(t_0),\ y_0\}\in\Omega(\alpha,\beta)$, $x_0\leqslant y_0$ и

$$u(t)\leqslant v(t) \quad (t\geqslant t_0), \tag{28.9}$$

то

$$R[t_0,x_0;\alpha,\beta]u(t)\leqslant R[t_0,y_0;\alpha,\beta]v(t) \quad (t\geqslant t_0). \tag{28.10}$$

Монотонность по входам можно использовать как основу определения неидеального реле. Для этого нужно вначале определить выходы при монотонных входах. Затем при помощи полугруппового тождества определить выходы при кусочно монотонных непрерывных входах. После этого установить монотонность по входам и заметить, что определенное на кусочно монотонных входах соответствие вход-выход имеет единственное монотонное продолжение на пространство всех непрерывных входов. Построенное продолжение задает оператор (28.6) на всех непрерывных входах.

Имеет место и естественная монотонность по пороговым числам.

Значениями оператора (28.6) являются функции, принимающие лишь два значения: 0 и 1. Поэтому можно его рассматривать как оператор, действующий из пространства $C=C(t_0,t_1)$ непрерывных на $[t_0,t_1]$ функций $u(t)$ в любое $L_q=L_q(0,1)$, где $1\leqslant q\leqslant\infty$. Непосредственно из определения реле вытекает простая, но важная

Т е о р е м а 28.1. *Каждый* $R[t_0,x_0;\alpha,\beta]$ $(\beta<\alpha)$ *локально компактен как оператор из* $C(t_0,t_1)$ *в* $L_q(t_0,t_1)$ *при* $1\leqslant q<\infty$.

Δ Достаточно рассмотреть фиксированную функцию $u_*(t)\in C(t_0,t_1)$, удовлетворяющую условию $\{u_*(t_0),\ x_0\}\in\Omega(\alpha,\beta)$, и заметить, что количество точек разрыва у выходов $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ равномерно ограничено, если рассматривать входы $u(t)$ из малой окрестности в $C(t_0, t_1)$ функции $u_*(t)$. ▲

Если $R[t_0, 0; \alpha, \beta]$ трактовать как определенный на функциях $u(t) \in C$, для которых $u(t_0) < \beta$, оператор со значениями в L_∞, то точками его разрыва будут функции, принимающие значение β хотя бы при одном $\tau \in [t_0, t_1]$. Аналогично $R[t_0, 1; \alpha, \beta]$ как оператор из C в L_∞ разрывен в точке $u(t) \in C$ $(u(t_0) > \alpha)$, если $u(\tau) = \alpha$ хотя бы при одном $\tau \in [t_0, t_1]$. Поэтому множество точек разрыва действующих из C в L_∞ операторов $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ содержит открытые области.

Ситуация становится другой, если рассматривать $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ как оператор из C в L_q, где $1 \leqslant q < \infty$; здесь множество точек разрыва тощее.

Если рассматривать рис. 28.1 как график многозначной характеристики некоторого функционального звена, то это функциональное звено не совпадает с реле $R(\alpha, \beta)$.

В заключение пункта отметим, что пороговые значения α и β часто называют током включения и током отпускания. Когда выход равен 1, то, как говорят, *реле включено*; если выход равен 0, то *реле отключено.*

28.3. Периодические входы. Вначале распространим операторы (28.6) на произвольные непрерывные входы $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$, не обязательно удовлетворяющие условию $\{u(t_0), x_0\} \in \Omega(\alpha, \beta)$. Для этого дополнительно к правилу (28.7) будем считать, что

$$R[t_0, 1; \alpha, \beta]u(t) \equiv R[t_0, 0; \alpha, \beta]u(t), \text{ если } u(t_0) \leqslant \beta, \tag{28.11}$$

и

$$R[t_0, 0; \alpha, \beta]u(t) \equiv R[t_0, 1; \alpha, \beta]u(t), \text{ если } u(t_0) \geqslant \alpha. \tag{28.12}$$

Распространенные на все непрерывные входы операторы (28.11) и (28.12) можно на монотонных входах определить простыми наглядными формулами

$$R[t_0, 1; \alpha, \beta]u(t) = \begin{cases} r_-[u(t), \beta], & \text{если} \quad u(t_0) > \beta, \\ r_+[u(t), \alpha], & \text{если} \quad u(t_0) \leqslant \beta, \end{cases} \tag{28.13}$$

и

$$R[t_0, 0; \alpha, \beta]u(t) = \begin{cases} r_+[u(t), \alpha], & \text{если} \quad u(t_0) < \alpha, \\ r_-[u(t), \beta], & \text{если} \quad u(t_0) \geqslant \alpha, \end{cases} \tag{28.14}$$

в которых использованы функции (28.1) и (28.2). Столь же простым и наглядным остается правило отыскания выходов при кусочно монотонных входах, если правила (28.13) и (28.14) дополнить полугрупповым тождеством.

Сопоставим каждому непрерывному входу $u(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ определенные также при всех t две непрерывные функции

$$R_0 u(t) = \lim_{\tau \to -\infty} R[\tau, 0; \alpha, \beta]u(t) \quad (-\infty < t < \infty) \tag{28.15}$$

и

$$R_1 u(t) = \lim_{\tau \to -\infty} R[\tau, 1; \alpha, \beta]u(t) \quad (-\infty < t < \infty). \tag{28.16}$$

Существование пределов очевидно; более того, каждому фиксированному t_* отвечает такое τ_*, что при $\tau \leqslant \tau_*$ все функции $R[\tau, 0; \alpha, \beta]u(t)$ (аналогично все функции $R[\tau, 1; \alpha, \beta]u(t)$) принимают одинаковые значения при $t \geqslant t_*$. Функции (28.15) и (28.16) не совпадают, если и только если $u(t) \in (\beta, \alpha)$ при всех $t \leqslant t_{**}$, где t_{**} – некоторое фиксированное число. Будем писать

$$y(t) = R(-\infty; \alpha, \beta)\, u(t) \quad (-\infty < t < \infty), \tag{28.17}$$

рассматривая правую часть как оператор, сопоставляющий входу $u(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ две функции (28.15) и (28.16); как уже говорилось, для многих входов значение оператора (28.17) – это одна функция.

Более подробно рассмотрим случай, когда вход $u(t)$ периодичен с некоторым периодом T. Тогда обе функции (28.15) и (28.16) также периодичны с тем же периодом; они различны лишь в случае, когда $u(t) \in (\beta, \alpha)$, – в этом случае $R_0 u(t) \equiv 0$ и $R_1 u(t) \equiv 1$.

При T-периодическом входе $u(t)$ выход $x(t) = R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t)$ периодичен при $t \geqslant T + t_0$, т.е. $x(t + T) = x(t)$ при $t \geqslant t_0 + T$. Если этот выход продолжить по периодичности с полуоси $t \geqslant t_0 + T$ на всю числовую ось, то продолженная функция совпадает с $R_{x_0} u(t)$.

28.4. Замыкание реле. Замыкание $\overline{\Omega}(\alpha, \beta)$ области возможных состояний $\Omega(\alpha, \beta)$ реле $R(\alpha, \beta)$ получается присоединением к $\Omega(\alpha, \beta)$ двух точек: $\{\alpha, 0\}$ и $\{\beta, 1\}$ (см. рис. 28.1).

Сопоставим каждому непрерывному входу $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$ два множества $\overline{R}\,[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t)$ $(x_0 = 0, 1)$ функций $x(t)$ со значениями 0, 1, удовлетворяющих следующим требованиям.

а. Если $u(t) > \beta$ при $t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, \infty)$, то $x(t)$ не убывает на $[t_1, t_2]$.

б. Если $u(t) < \alpha$ при $t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, \infty)$, то $x(t)$ не возрастает на $[t_1, t_2]$.

в. $\{u(t), x(t)\} \in \overline{\Omega}(\alpha, \beta)$ при $t \geqslant t_0$ и $x(t_0) = R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t_0)$.

Теорема 28.2. *Если рассматривать $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ как операторы из $C(t_0, t_1)$ в $L_q(t_0, t_1)$, где $1 \leqslant q < \infty$, то их замыканиями будут многозначные операторы $\overline{R}\,[t_0, x_0; \alpha, \beta]$.*

Δ Утверждение теоремы вытекает из определений. $\blacktriangle$

При переходе к замыканиям свойства операторов $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ естественным образом модифицируются. Например, полугрупповое свойство приобретает следующий смысл: если функция $x(t)$ $(t \geqslant t_0)$ принадлежит $\overline{R}\,[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t)$, то о ее сужении на промежуток $t \geqslant t_1$ $(t_1 > t_0)$ можно лишь утверждать, что оно принадлежит одному из множеств $\overline{R}\,[t_1, x_1; \alpha, \beta]u(t)$, где $x_1 \in \overline{R}[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t_1)$.

Рассмотрим реле $R(1, -1)$ и вход $u(t) = \sin t$ $(t \geqslant 0)$. Множество $\overline{R}\,[0, 0; 1, -1]$ будет счетнозначно, причем сужение на $[0, \pi]$ каждой функции из этого множества совпадает с одной из следующих трех функций: $x_1(t) \equiv 0$; $x_2(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ и $x_2(t) = 1$ при $\pi/2 < t \leqslant \pi$; $x_3(t) = 0$ при $0 \leqslant t < \pi/2$ и $x_3(t) = 1$ при $\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$. Последние две функции как элементы какого-либо L_q неразличимы.

28.5. Овыпукливание реле. Рассмотрим $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ как операторы, действующие из пространства $C(t_0, t_1)$ непрерывных входов в некоторое пространство $L_q = L_q(t_0, t_1)$. *Овыпукливание реле* определяется обычным равенством

$$R^{\square}[t_0, x_0;\ \alpha, \beta]u(t) =$$
$$= \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\text{co}}\,\{x(t).\ x(t) = R[t_0, x_0;\ \alpha, \beta]v(t), \|v(t) - u(t)\|_{t_0, t_1} < \epsilon\}. \quad (28.18)$$

Непосредственно из определения вытекает

Т е о р е м а 28.3. *Каждое множество $R^{\square}[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t)$ состоит из функций $x(t)$, удовлетворяющих следующим требованиям:*

а. *Если $u(t) > \beta$ при $t \in [\tau_1, \tau_2] \subset [t_0, \infty)$, то $x(t)$ не убывает на $[\tau_1, \tau_2]$.*

б. *Если $u(t) < \alpha$* при *$t \in [\tau_1, \tau_2] \subset [t_0, \infty)$, то $x(t)$ не возрастает на $[\tau_1, \tau_2]$.*

в. *$x(t_0) = R[t_0, x_0;\ \alpha, \beta]u(t_0)$ и $\{u(t), x(t)\} \in \Omega^{\square}(\alpha, \beta)$ при всех $t \geqslant t_0$, где область возможных состояний $\Omega^{\square}(\alpha, \beta)$ овыпукливания реле состоит из $\Omega(\alpha, \beta)$ и прямоугольника $\beta \leqslant u \leqslant \alpha, 0 \leqslant x \leqslant 1$.*

Если $u(t) \in (\beta, \alpha)$ при $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, то в силу теоремы 28.3 каждая функция $x(t)$ из $R^{\square}[t_0, x_0;\ \alpha, \beta]u(t)$ принимает на $[\tau_1, \tau_2]$ некоторое постоянное значение $x(\tau_1) \in [0, 1]$.

Замыкания и овыпукливания операторов $R[t_0, x_0;\ \alpha, \beta]$ многозначны. Естествен соблазн ввести при изучении неидеального реле с самого начала многозначный оператор $R[t_0;\ \alpha, \beta]$, каждое значение $R[t_0;\ \alpha, \beta]u(t)$ которого состоит из двух элементов $R[t_0, 0;\ \alpha, \beta]u(t)$ и $R[t_0, 1;\ \alpha, \beta]u(t)$, а затем уже строить замыкание $\bar{R}[t_0;\ \alpha,\ \beta]$ и овыпукливание $R^{\square}[t_0, \alpha, \beta]$. Если $R[t_0;\ \alpha, \beta]$ рассматривается как оператор из C в любое L_q, то при каждом входе множество $\bar{R}[t_0;\ \alpha, \beta]u(t)$ является объединением множеств $\bar{R}[t_0, 0;\ \alpha, \beta]u(t)$ и $\bar{R}[t_0, 1;\ \alpha, \beta]u(t)$. Если $R[t_0;\ \alpha, \beta]$ рассматривается как оператор из C в L_q, где $1 \leqslant q < \infty$, то каждое множество $R^{\square}[t_0;\alpha, \beta]u(t)$ состоит из функций $x(t)$, удовлетворяющих требованиям "а", "б" теоремы 28.3 и требованию "в" той же теоремы, из которого исключено условие $x(t_0) = R[t_0, x_0;\alpha, \beta]u(t_0)$. Для оператора $R^{\square}[t_0;\alpha, \beta]$ аналоги полугрупповых тождеств формулируются более естественно и просто, чем для операторов $R^{\square}[t_0, x_0;\alpha, \beta]$.

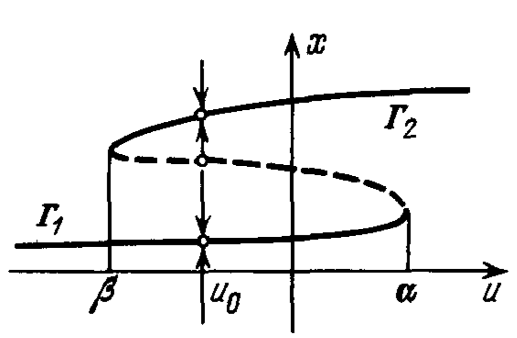
Рассмотрим теперь последовательность $L(\Gamma_l^k, \Gamma_r^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ обобщенных люфтов (см. п. 2.2). Через $L(t_0;\Gamma_l^k, \Gamma_r^k)$ обозначим оператор, сопоставляющий непрерывному входу $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$ множество функций $L[t_0, x_0;\Gamma_l^k, \Gamma_r^k]u(t)$, где $\Gamma_r^k[u(t_0)] \leqslant$ $\leqslant x_0 \leqslant \Gamma_l^k[u(t_0)]$. Пусть $\theta_l(k) + \theta_r(k) \to 0$, где $\theta_l(k)$ – хаусдорфово расстояние между графиками функций $\Gamma_l^k(u)$ и $r^{\square}(u, \beta)$, а $\theta_r(k)$ – между графиками функций $\Gamma_r^k(u)$ и $r^{\square}(u, \alpha)$. Тогда, как оказывается, *хаусдорфово расстояние в* $C(t_0, t_1) \times L_q(t_0, t_1)$ *(здесь $1 \leqslant q < \infty$) между графиками операторов $L[t_0;\Gamma_l^k, \Gamma_r^k]$ и $R^{\square}[t_0;\alpha, \beta]$ стремится к нулю* Поэтому многозначный оператор $R^{\square}[t_0;\alpha, \beta]$ можно в указанных условиях считать разумной идеализацией обобщенных люфтов.

Обычные операторы $R[t_0, x_0;\alpha, \beta]$ также являются естественной идеализацией люфтов $L[t_0, x_0;\ \Gamma_l, \Gamma_r]$, если графики функций $\Gamma_l(u)$ и $\Gamma_r(u)$ близки к графикам функций $r^{\square}(u, \beta)$ и $r^{\square}(u, \alpha)$.

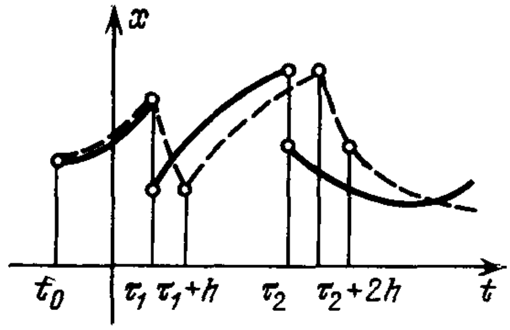
28.6. Реле и медленные управлении. Пусть уравнение

$$f(x, u) = 0 \quad (28.19)$$

описывает кривую Γ, изображенную на рис. 28.2. У этой кривой одна общая точка с прямой $u = u_0$, если $u_0 < \beta$ или $u_0 > \alpha$, и три общие точки, если $\beta < u_0 < \alpha$. Кривая Γ делит плоскость на две части. Пусть в верхней части функция $f(x, u)$ принимает



Р и с. 28.2.



Р и с. 28.3.

отрицательные значения, а в нижней – положительные. Изучим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \tag{28.20}$$

с медленным управлением $u = u(t)$.

Если $u(t) \equiv u_0$, то уравнение (28.20) описывает движение точки по вертикальной прямой $u = u_0$; направление движения на одной из таких прямых показано на рис. 28.2 стрелками. Точки пересечения прямой $u = u_0$ и кривой Γ будут состояниями равновесия; штриховой линией показана часть кривой Γ, состоящая из неустойчивых точек равновесия, а сплошной линией – из асимптотически устойчивых; эта сплошная линия состоит из графиков Γ_1 и Γ_2 некоторых функций $\gamma_1(u)$ и $\gamma_2(u)$.

Указанной информации достаточно, чтобы описать качественное поведение решений $x(t)$ уравнения (28.20) при медленно меняющемся управлении $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$. После короткого промежутка времени (которым можно пренебречь) точка $\{u(t), x(t)\}$ попадет, вообще говоря, в столь малую окрестность либо точки $\{u(t), \gamma_1[u(t)]\}$, либо точки $\{u(t), \gamma_2[u(t)]\}$, что ее можно считать совпадающей либо с $\{u(t), \gamma_1[u(t)]\}$, либо с $\{u(t), \gamma_2[u(t)]\}$. Пусть для определенности $u(t_1) < \alpha$ и $x(t_1) \approx \gamma_1[u(t_1)]$; тогда при дальнейших значениях $t \in (t_1, t_2)$ при которых $u(t) < \alpha$, точка $\{u(t), x(t)\}$ не выходит из малой окрестности кривой Γ_1, и можно считать выполненным равенство $x(t) = \gamma_1[u(t)]$. Если $u(t_2) = \alpha$ и $u(t)$ в точке t_2 растет, то за короткое время (т.е. за такой промежуток времени, на котором $u(t)$ мало меняется) точка $\{u(t), x(t)\}$ попадет уже в малую окрестность кривой Γ_2, и можно считать выполненным равенство $x(t) = \gamma_2[u(t)]$. Продолжая эти рассуждения, мы приходим к описанию решения $x(t)$, которое совпадает с описанием (при помощи принципа отсутствия лишних переключений) неидеального реле с пороговыми значениями α и β, если Γ_1 совпадает с полупрямой $x = 0$ $(u < \alpha)$, а Γ_2 – с полупрямой $x = 1$ $(u > \beta)$.

Близкие источники возникновения релейных нелинейностей часто возникают в теории дифференциальных уравнений с малыми параметрами, в теории катастроф и т.п.

28.7. Разрывные входы. В сложных системах на звено, математической моделью которого является неидеальное реле, могут поступать сигналы, не обладающие свойством непрерывности. В этих случаях приходится определять значения операторов $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ на некоторых классах разрывных входов. Для этого могут применяться различные конструкции. Изложим здесь одну из них.

Функцию $u(t)$ назовем *кусочно-непрерывной*, если она имеет на каждом конечном промежутке $[t_0, t_1]$ изменения аргумента лишь конечное число точек разрыва, каждая из которых – точка разрыва первого рода. Иначе говоря, если $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ – точки разрыва кусочно-непрерывной функции $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, то $u(t)$ на каждом промежутке (τ_{j-1}, τ_j) совпадает с некоторой функцией $v_j(t)$, определенной и непрерывной на $[\tau_{j-1}, \tau_j]$. Значения кусочно-непрерывной функции в точках разрыва нас интересовать не будут; однако удобно считать, что в начальный момент функция непрерывна справа, т.е. $u(t_0) = v_1(t_0)$.

Зададимся произвольным $h > 0$ и сопоставим описанной выше кусочно-непрерывной функции $u(t)$ непрерывную на $[t_0, t_1 + (n-1)h]$ функцию $w_h(t)$, которая на каждом промежутке $[\tau_{j-1} + (j-1)h, \ \tau_j + (j-1)h]$ определена равенством $w_h(t) = v_j[t-(j-1)h]$ и на каждом промежутке $[\tau_j + (j-1)h, \ \tau_j + jh]$ линейна. На рис.28.3 сплошной линией показан график функции $u(t)$, а штриховой линией – функции $w_h(t)$. Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$ естественно считать "хорошим" приближением функции $w_h(t)$, если h мало.

Функции $w_h(t)$ позволяют распространить операторы $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ на кусочно-непрерывные входы $u(t)$ равенством

$$R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t) = \xi_h[t + (j-1)h] \quad (\tau_{j-1} < t \leqslant \tau_j; \ j = 1, \ldots, n), \tag{28.21}$$

в котором

$$\xi_h(t) = R[t_0, x_0; \ \alpha, \beta] \ w_h(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + (n-1)h). \tag{28.22}$$

Из статичности реле вытекает, что выход (28.21) не зависит от использованного при его построении числа h.

Изложенная конструкция почти без изменений переносится на произвольные разрывные входы $u(t)$, вариация которых на каждом ограниченном промежутке $[t_0, \ t_1]$ конечна.

Глава 6.

ЯВЛЕНИЕ САМОНАМАГНИЧИВАНИЯ

Конечно, у этой проблемы есть две стороны Рассмотрим вторую

О. Генри, "Горящий светильник"

§ 29. ГИСТЕРОНЫ МАДЕЛУНГА

29.1. Невиброкорректный предгистерон. В этой главе изучаются системы с гистерезисом, не обладающие свойством виброкорректности. Подобные системы возникают во многих задачах естествознания; отсутствие виброкорректности ярко проявляется, например, в известном эффекте самонамагничивания.

Пусть $\Omega(W)$ – область возможных состояний $\{u, x\}$ некоторого предгистерона W, причем пересечение множества $\Omega(W)$ с каждой прямой $u = u_0$ является промежутком. Тогда через каждую точку $\{u_0, x_0\} \in \Omega(W)$ проходят лежащие в $\Omega(W)$ графики двух непрерывных по совокупности переменных функций

$$x = T_l(u; u_0, x_0) \quad (u \leqslant u_0), \qquad x = T_r(u, u_0, x_0) \quad (u \geqslant u_0). \tag{29.1}$$

При этом справедливы тождества

$$T_l(u_0; u_0, x_0) \equiv x_0, \quad T_r(u_0; u_0, x_0) \equiv x_0;$$

из

$$u_1 \leqslant u_0, \quad u_1 \leqslant v_0, \quad T_l(u_1; u_0, x_0) = T_l(u_1; v_0, y_0)$$

вытекает равенство

$$T_l(u; u_0, x_0) = T_l(u; v_0, y_0) \quad (u \leqslant u_1);$$

а из

$$u_0 \leqslant u_2, \quad v_0 \leqslant u_2, \quad T_r(u_2, u_0, x_0) = T_r(u_2; v_0, y_0)$$

вытекает равенство

$$T_r(u; u_0, x_0) = T_r(u; v_0, y_0) \quad (u \geqslant u_2)$$

При начальном состоянии $\{u_0, x_0\}$ и монотонном непрерывном входе $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$, удовлетворяющем условию

$$u(t_0) = u_0, \tag{29.2}$$

выход

$$x(t) = W[t_0, x_0]\, u(t) \quad (t \geqslant t_0) \tag{29.3}$$

определяется равенством

$$x(t) = \begin{cases} T_l[u(t); u_0, x_0], & \text{если } u(t) \text{ не возрастает,} \\ T_r[u(t); u_0, x_0], & \text{если } u(t) \text{ не убывает.} \end{cases} \tag{29.4}$$

Для перехода к кусочно-монотонным непрерывным входам нужно, как обычно, воспользоваться полугрупповым тождеством

$$W[t_0, x_0]\, u(t) = W[t_1, W[t_0, x_0]\, u(t_1)]\, u(t) \quad (t_0 \leqslant t_1 \leqslant t). \tag{29.5}$$

В силу теоремы 8.1 построенный предгистерон W свойством виброкорректности не обладает (если хотя бы одна внутренняя точка $\{u_0, x_0\}$ одного из лежащих в $\Omega(W)$ вертикальных промежутков является одновременно внутренней точкой графиков двух функций $T_l(u; u_1, x_1)$, $T_r(u; u_2, x_2)$, не совпадающих ни на какой окрестности $(u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$ точки $u = u_0$). Предгистерон W обладает лишь свойством слабой виброкорректности: для каждой последовательности монотонных входов $u_n(t)$ $(t \geqslant t_0)$, равномерно на каждом конечном промежутке времени сходящейся к входу $u_*(t)$ $(t \geqslant t_0)$, и для каждой последовательности начальных состояний $\{u_n(t_0), x_n\} \in \Omega(W)$, сходящейся к $\{u_*(t_0), x_*\} \in \Omega(W)$, справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} W[t_0, x_n]\, u_n(t) = W[t_0, x_*]\, u_*(t) \quad (t \geqslant t_0), \tag{29.6}$$

причем сходимость в (29.6) также равномерна на каждом конечном промежутке.

На рис. 29.1 показана часть области $\Omega(W)$ возможных состояний некоторого предгистерона W. Тонкие линии – графики функций T_l и T_r. Утолщенная линия – одна из траекторий $\{u(t), W[t_0, x_0]\, u(t)\}$; каждое звено $M_{i-1} M_i$ этой траектории отвечает промежутку монотонности входа $u(t)$.

Важным примером предгистерона является преобразователь W, определяемый двумя обычными гистеронами W_1 и W_2 с одинаковой областью возможных состояний. Положим $\Omega(W) = \Omega(W_1) = \Omega(W_2)$ и определим при неубывающих входах $u(t)$ выход $x(t)$ равенством

$$W[t_0, x_0]\, u(t) = W_1[t_0, x_0]\, u(t) \quad (t \geqslant t_0), \tag{29.7}$$

при невозрастающих – равенством

$$W[t_0, x_0]\, u(t) = W_2[t_0, x_0]\, u(t) \quad (t \geqslant t_0), \tag{29.8}$$

а при кусочно-монотонных – полугрупповым тождеством (29.5).

29.2. Периодические входы. В случае общего предгистерона периодический выход при периодическом входе устанавливается не всегда. Однако для широкого класса предгистеронов периодичность выхода после некоторого времени установления очевидна. Если периодическому входу $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$ отвечает периодический при $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$ выход $W[t_0, x_0]\, u(t)$, то при $t \geqslant t_1$ переменное

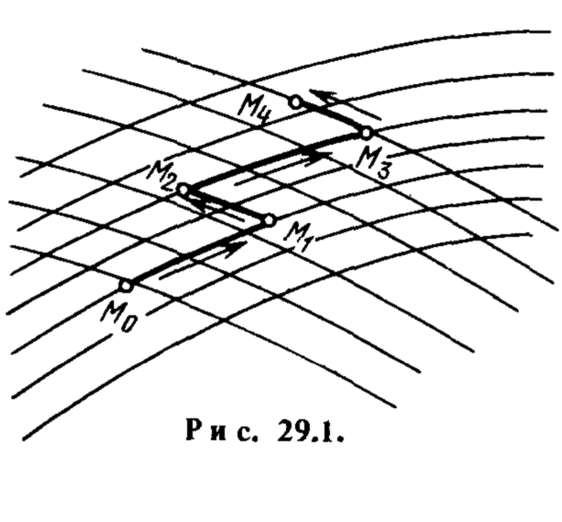
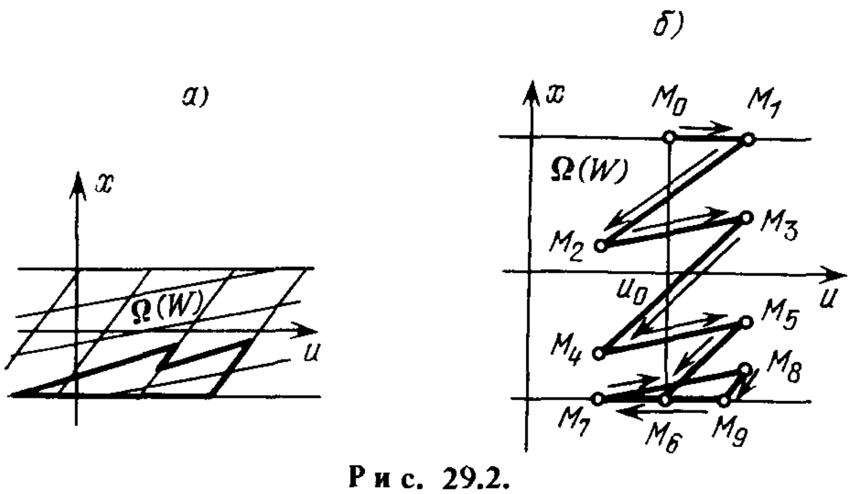


Рис. 29.1.



Р и с. 29.2.

состояние $\{u(t), \overset{*}{W}[t_0, x_0]u(t)\}$ описывает замкнутую кривую – *петлю гистерезиса.*

В качестве примера рассмотрим предгистерон W, который определяется (см. формулы (29.7) и (29.8)) по двум упорам W_1 и W_2 с одинаковой областью возможных состояний, но разными модулями упругости. На рис. 29.2,*а* показана одна из петель гистерезиса (утолщенная линия). На рис. 29.2,*б* ломанная $M_0 M_1 \cdots M_9$ демонстрирует пример установления периодического выхода при начальном состоянии M_0 и некотором периодическом входе; петлей гистерезиса является треугольник $M_7 M_8 M_9$. Тот же рис. 29.2,*б* объясняет природу отсутствия виброкорректности – если $M_0 = \{u_0, x_0\}$ и $u_0(t) = u_0$, то при переменном входе $u_\epsilon(t) = u_0 + \epsilon \sin t$ и сколь угодно малом $\epsilon > 0$ выход $W[t_0, x_0]u_\epsilon(t)$ не близок к выходу $W[t_0, x_0]u_0(t) \equiv x_0$.

В общем случае периодическому входу $u(t)$ всегда отвечает либо предельно периодический выход, либо неограниченный выход.

29.3. Предгистерон Маделунга. В дальнейшем предполагается, что функции (29.1) – это решения дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{du} = f_l(x, u), \quad \frac{dx}{du} = f_r(x, u), \tag{29.9}$$

удовлетворяющие начальному условию

$$x(u_0) = x_0. \tag{29.10}$$

Функции $f_l(x, u)$ и $f_r(x, u)$ часто бывают гладкими во внутренних точках области $\Omega(W)$; на границе области $\Omega(W)$ они, как правило, разрывны. Функции $f_l(x, u)$ и $f_r(x, u)$ предполагаются борелевыми, локально ограниченными и удовлетворяющими односторонним условиям Липшица по первой переменной:

$$(x - y)\,[f_l(x, u) - f_l(y, u)] \geqslant -\lambda(u)\;(x - y)^2, \tag{29.11}$$

$$(x - y)\,[f_r(x, u) - f_r(y, u)] \leqslant \lambda(u)\;(x - y)^2, \tag{29.12}$$

где $\lambda(u)$ – некоторая непрерывная неотрицательная функция. Решения уравнений (29.9) определяются как абсолютно непрерывные функции, для которых при почти всех u справедливы соответственно включения

$$\frac{dx(u)}{du} \in f_l\,[x(u), u], \quad \frac{dx(u)}{du} \in f_r\,[x(u), u] \tag{29.13}$$