

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
(ГОУ ВПО ВГУ)

На правах рукописи

НГУЕН ТХИ ХИЕН

О дифференциальных уравнениях систем гистерезисного типа

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук,
профессор Садовский Б. Н.

ВОРОНЕЖ – 2010

Содержание

Введение	5
1 Предварительные результаты для изучения систем с релейным управлением	20
1.1 Утверждение об практической эквивалентности описания реле в виде локально явного уравнения явному описанию по Красносельскому – Покровскому	20
1.2 Свойства реле $R_{t_0}^t$	21
1.2.1 Автономность	21
1.2.2 Вольтерровость – причинность	22
1.2.3 Полугрупповое свойство	22
1.2.4 Статичность	22
1.2.5 Управляемость	23
1.3 Определение $R_{-\infty}^t$	24
1.4 Свойства $R_{-\infty}^t$	25
1.4.1 Автономность	25
1.4.2 Вольтерровость – причинность	25
1.4.3 Полугрупповое свойство	26
1.4.4 Статичность	27
1.4.5 Управляемость	28
1.5 Утверждение о периодических входах и выходах	28
2 Гладкое описание реле с гистерезисом	30
2.1 Постановка задачи	30
2.2 Теорема о степени несовпадения выходов гладкого и локально явного описания	31
2.3 Формулировка теоремы о близости	34
2.4 Оценки констант	34
2.5 Доказательство теоремы о близости	36

2.5.1	Лемма о зависимости решений от начальных данных и параметра	36
2.5.2	Утверждение об оценке времени срабатывания гладкого реле	37
2.5.3	Утверждение о близости поверхностей уровня	38
2.5.4	Утверждение об оценке промежутка между выходами на пороговые значения	39
2.5.5	Утверждение об оценке близости	40
2.6	Частный случай	44
2.6.1	Оценка констант C в частном случае	45
2.6.2	Доказательство	45

3 Примеры анализа некоторых систем с релейным управлением **50**

3.1	Система с одним реле на плоскости	50
3.1.1	Постановка задачи	50
3.1.2	Теорема (критерий периодичности решений)	50
3.1.3	Эксперименты численного анализа	53
3.1.4	Оценка близости к решениям системы с локально явным описанием реле	56
3.2	Система с двумя реле	58
3.2.1	Постановка задачи	58
3.2.2	Утверждение о существовании периодического решения	58
3.3	Бесконечная система реле	61
3.3.1	Лемма о двоичной системе	62
3.3.2	Утверждение о существовании периодического выхода	62
3.3.3	Утверждение о существовании и единственности периодического выхода	63

4	Гладкое описание упора и люфта	65
4.1	Постановка задачи	65
4.2	Утверждение об оценке близости выходов упора с гладким входом	65
4.3	Утверждение об оценке близости выходов упора с непрерывным входом	67
4.4	Утверждение об оценке близости для выхода люфта с непрерывным входом	69
4.5	Эксперименты численного анализа и оценки близости . . .	71
5	Гладкое описание системы с диодной нелинейностью	74
5.1	Постановка задачи	74
5.2	Теорема о точности гладкого описания системы с диодной нелинейностью	75
5.3	Частный случай	77
5.4	Пример	80
5.5	Обобщенная теорема о существовании и единственности предельного цикла (см.[22])	82
5.6	Пример применения обобщенной теоремы	84
5.6.1	Постановка задачи	84
5.6.2	Теорема о замкнутой траектории	84
5.7	Оценка близости и эксперименты численного анализа . . .	87
5.7.1	Теорема об оценке близости	88
5.7.2	Эксперименты численного анализа	89
	Список литературы	93

Введение

Появление математических описаний гистерезисных явлений обуславливалось достаточно богатым набором прикладных задач (прежде всего в теории автоматического регулирования), в которых носители гистерезиса нельзя рассматривать изолированно, поскольку они являлись частью некоторой более сложной системы. Создание математической теории гистерезиса относится к 60-м годам XX века, когда в Воронежском государственном университете начал работать семинар под руководством М. А. Красносельского, посвященный "гистерезисной" тематике. В связи с семинаром было подготовлено и опубликовано несколько работ (см. [14] – [18], [28] и [2]). Позднее, в 1983 году появилась монография [19], в которой различные гистерезисные явления получили формальное описание в рамках теории систем: гистерезисные преобразователи трактовались как операторы, зависящие от своего начального состояния как от параметра, определённые на достаточно богатом функциональном пространстве (например, пространстве непрерывных функций), действующие в некоторое функциональное пространство. Различным вопросам, связанным с гистерезисными нелинейностями, посвящены многие сотни статей и монографий. Информацию о подходах к изучению гистерезисных явлений, а также обширную библиографию можно найти в [47], [48], [3], [4], [24], [12], [5], [13], [36], [37], [29] – [31] и [1].

Реле рассматривается как преобразователь с произвольным непрерывным входом $x(t)$ и выходом $y(t)$, имеющим два возможных значения 0 и 1, причем при $x(t) \leq \alpha$ – только 0, при $x(t) \geq \beta$ – только 1. 0 скачком меняется на 1 при достижении входным сигналом значения β , 1 на 0 – при достижении α . При этом α, β ($\alpha < \beta$) называются, соответственно, нижним и верхним пороговыми значениями реле. Таким образом, *областью* $\Omega(\alpha, \beta)$ *допустимых состояний* реле с пороговыми значениями α и β является множество точек (x, y) плоскости, лежащих на двух полупрямых: $y = 0$ при $x < \beta$ и $y = 1$ при $x > \alpha$. Различные формальные уточне-

ния приведенного *феноменологического* описания реле рассматривались многими авторами (см., например, [44], [19], [13], [29] и [30]).

По Я.З. Цыпкину уравнение гистерезисного элемента в общем случае определяется не функцией от входа x , а оператором, определенным на входах x , и может быть представлено в виде

$$y(t) = \Phi(x(s)|_0^t; \sigma).$$

Эта запись показывает, что выходная величина $y(t)$ в момент t определяется значением входной величины $x(t)$ не только в момент t , но и его значениями во все предыдущие моменты времени и, кроме того, $y(t)$ зависит от некоторого параметра σ . Описания нелинейных элементов при наличии гистерезиса в общем случае можно найти в работах В.А. Якубовича [45], [46]. В цикле работ Я.З. Цыпкина (см. [40] – [43]) изучены различные аспекты теории релейных автоматических систем. Релейный элемент, отвечающий приведенному выше феноменологическому описанию, Я.З. Цыпкин называет элементом с положительным гистерезисом и без зоны нечувствительности (см. [44], с. 74). Если обозначим через $\sigma = y_1 \in \{0, 1\}$ значение выходного сигнала после последнего момента t_1 переключения реле, то уравнение такого элемента можно представить в следующем виде (приведем его в несколько измененной эквивалентной форме):

$$y(t) = \Phi(x; y_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > \beta \text{ или } \beta \geq x(s) > \alpha \text{ при } y_1 = 1; \\ 0, & \text{если } x < \alpha \text{ или } \alpha \leq x(s) < \beta \text{ при } y_1 = 0. \end{cases}$$

В монографии М.А. Красносельского и А.В. Покровского [19] (см. также [13]) дано следующее явное описание такого реле (мы приводим его в несколько измененной эквивалентной форме). При каждом начальном состоянии $(x_0, y_0) \in \Omega(\alpha, \beta)$ в момент времени $t = t_0$ допустимыми являются непрерывные входы $x(t)$ ($t \geq t_0$), удовлетворяющие условию $x(t_0) = x_0$. Допустимому входу $x(t)$ отвечает выход $y(t)$ ($t \geq t_0$), который

определяется соотношениями:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x(t) \leq \alpha \vee \exists(t_1)[x(t_1) = \alpha \wedge \forall(\tau \in (t_1, t])[x(\tau) < \beta]], \\ 1, & \text{если } x(t) \geq \beta \vee \exists(t_1)[x(t_1) = \beta \wedge \forall(\tau \in (t_1, t])[x(\tau) > \alpha]], \\ y_0, & \text{если } x(\tau) \in (\alpha, \beta) \text{ при всех } \tau \in [t_0, t]. \end{cases} \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что при таком описании выходная функция меняет свое значение точно в моменты достижения входной функции пороговых значений, т.е. выходная функция непрерывна справа.

Следуя [29], в соответствии с приведенным феноменологическим описанием выходной сигнал можно записать локально явным уравнением:

$$y(t + dt) = \begin{cases} 0, & \text{если } x(t) \leq \alpha, \\ 1, & \text{если } x(t) \geq \beta, \\ y(t), & \text{если } \alpha < x(t) < \beta. \end{cases} \quad (2)$$

Решение уравнения (2) определяется как непрерывная слева функция $y(t)$, которая при каждом t из ее области определения удовлетворяет этому уравнению при достаточно малых положительных $dt : dt \in (0, \delta(t))$, $\delta(t) > 0$.

Заметим, что для описания реле в виде локально явного уравнения (2) областью $\Omega(\alpha, \beta)$ допустимых состояний реле с пороговыми значениями α и β является множество точек (x, y) плоскости, лежащих на двух полупрямых: $y = 0$ при $x \leq \beta$ и $y = 1$ при $x \geq \alpha$. В дальнейшем, если (x_0, y_0) лежит в этой области, то мы обозначим $R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)$ решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$. Утверждение о существовании и единственности такого решения доказано в [29].

В [30] показано, что при локально явном описании (2) реле обладает основными свойствами, отмеченными в [19], например, свойством монотонности по входам и монотонности по пороговым значениям. Кроме этого, доказана непрерывная зависимость выхода от входа при условии,

что непрерывная входная функция в точках локального максимума не принимает значение β , а в точках локального минимума – α . В локально явном уравнении (2) предполагается непрерывность выходной функции слева, что существенно связано со спецификой локально явных уравнений; практически описания (1) и (2) эквивалентны.

Нелинейности люфт и упор широко используются в различных разделах физики, механики, теории управления и др. (см., например, [11], [3], [10] и [19]). *Одномерный упор*, соответствующий отрезку $[0, 1]$ – это преобразователь, который монотонно возрастающему входу $x(t)$ ($t \geq t_0$) и начальному состоянию $u_0 \in [0, 1]$ сопоставляет выходной сигнал $u(t)$, который возрастает с той же скоростью, что и вход $x(t)$, до тех пор, пока $u(t)$ не становится равным верхнему ограничению 1; после этого при дальнейшем возрастании входного сигнала, выход $u(t)$ равняется единице, т.е. $u(t) = \min\{1, x(t) - x(t_0) + u(t_0)\}$. Для убывающего входа $x(t)$ ($t \geq t_0$) и начального состояния $u_0 \in [0, 1]$ выход $u(t)$ со скоростью входа убывает до достижения нижнего ограничения 0; после этого при дальнейшем убывании входного сигнала, выход $u(t)$ не меняется, т.е. $u(t) = \max\{0, x(t) - x(t_0) + u(t_0)\}$.

Одномерный люфт, соответствующий отрезку $[0, 1]$ – это преобразователь, который монотонно возрастающему непрерывному входу $x(t)$ и начальному состоянию $v_0 \in [x(t_0), x(t_0) + 1]$ сопоставляет выход $v(t)$, который равен v_0 , пока $x(t) \leq v_0$, и $x(t)$ в дальнейшем, т.е. $v(t) = \max\{v_0, x(t)\}$. Для убывающего входа $x(t)$ и начального состояния $v_0 \in [x(t_0), x(t_0) + 1]$ выход определяется аналогично: v_0 , пока $x(t) + 1 \geq v_0$, и $x(t) + 1$ в дальнейшем, т.е. $v(t) = \min\{v_0, x(t) + 1\}$. Такие описания упора и люфта очевидным образом распространяются на кусочно монотонные непрерывные входы.

В монографии М.А. Красносельского и А.В. Покровского [19] дано следующее описание упора и люфта. Кусочно-гладкая входная функция $x(t)$ ($t \geq t_0$) преобразуется в выходные упора функцию $\varphi(t)$ и люфта

функцию $\psi(t)$, определяемые соотношениями:

$$\dot{\varphi} = \begin{cases} \dot{x}, & \text{если } \varphi \in (0, 1); \\ \max\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \varphi = 0; \\ \min\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \varphi = 1. \end{cases} \quad (3)$$

$$\dot{\psi} = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi \in (x, x + 1); \\ \max\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \psi = x; \\ \min\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \psi = x + 1. \end{cases} \quad (4)$$

В этой монографии (с. 111) доказано, что при заданном начальном условии решения двух последующих дифференциальных уравнений существуют и единственны. Под решением любого из этих уравнений понимается локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая ему почти всюду. Из леммы 2.2 на с. 16 и формулы (16.25) на с. 111 вытекает, что соответствия $x \mapsto \varphi$ и $x \mapsto \psi$ при фиксированных начальных значениях выходов удовлетворяют в норме пространства \mathbf{C} условию Липшица с константами, соответственно, 1 и 2. Поэтому определения этих операторов распространяются по непрерывности на любые непрерывные входы. Кроме этого, доказано, что оператор люфта обладает свойствами *детерминированности*, *статичности*, *управляемости*, *виброкоректности* (с. 18) и самым важным свойством *монотонности* – люфт монотонен в том смысле, что *увеличение* (*уменьшение*) входного сигнала влечет *увеличение* (*уменьшение*) и выходного сигнала (с. 22). В силу связи между упором и люфтом (с. 111) получим, что преобразователь упора также обладает аналогичными свойствами.

В [30] даются математические описания упора и люфта в виде локально явных уравнений. Для монотонных входов $x(t)$ выходные сигналы упора $u(t)$ и люфта $v(t)$ при малых $dt \geq 0$ можно задать локально

явными уравнениями:

$$u(t + dt) = \begin{cases} x(t + dt) - x(t) + u(t), & \text{если } u(t) \in (0, 1), \\ x(t + dt) - \max_{t \leq s \leq t+dt} x(s) + u(t), & \text{если } u(t) = 1, \\ x(t + dt) - \min_{t \leq s \leq t+dt} x(s) + u(t), & \text{если } u(t) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

$$v(t + dt) = \begin{cases} \max_{t \leq s \leq t+dt} x(s) - x(t) + v(t), & \text{если } v(t) = x(t), \\ \min_{t \leq s \leq t+dt} x(s) - x(t) + v(t), & \text{если } v(t) = x(t) + 1, \\ v(t) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

В [30] доказано, что описания упора (5) и люфта (6) имеют смысл для всех непрерывных входов и они эквивалентны, соответственно, приведенным выше феноменологическим описаниям. Кроме этого, доказана теорема о глобальной разрешимости и единственности сильного решения уравнений (5) и (6) с заданными начальными условиями.

Системы с диодными нелинейностями введены в рассмотрение [26], [27] в качестве математического описания электрических цепей с диодными преобразователями тока. С точки зрения теории цепей диод называется *идеальным*, если его ток i и напряжение u от анода к катоду удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} i \geq 0, \\ u \leq 0, \\ i \cdot u = 0. \end{cases}$$

Геометрически эта система означает, что точка с координатами (i, u) в любой момент времени должна принадлежать линии, составленной из положительной полуоси i и отрицательной полуоси u . Цепи *RLCD* и более широкие классы цепей изучались многими авторами (см., например, [8], [39], [38], [32], [33], [23], [6], [34], [7], [20], [21], [9], [25], [35] и [22]). Описание таких цепей сводится к изучению систем, называемых *обобщенными* системами с диодной нелинейностью. Пусть Q – непустое выпуклое замкнутое множество в \mathbb{R}^n . Тогда обобщенная система с диодной

нелинейностью имеет вид:

$$\dot{x} = \tau_x f(t, x), \quad (7)$$

где $\tau_x f(t, x)$ – проекция вектора $f(t, x)$ на T_x – касательный конус к Q в точке x (см. [19] с. 109).

В работе [20] изучается вопрос о разрешимости системы (7): доказана теорема о существовании и единственности решения данной системы при некотором начальном условии; в [9] получено достаточное условие асимптотической устойчивости положения равновесия системы (7); в [25] изучаются условия существования периодического решения данной системы, эта задача связана с вопросом о вынужденных колебаниях в электрических цепях, содержащих диоды; в [22] доказывается обобщение известной теоремы Пуанкаре – Бендиксона о существовании замкнутой траектории и описана ситуация, в которой гарантируется существование единственного орбитально устойчивого в усиленном смысле цикла.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Дадим краткое описание диссертации по главам.

В первой главе доказана практическая эквивалентность описаний реле в явном (1) и локально явном виде (2), введены и обоснованы обозначения для выхода реле: $R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)$ и $R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)$, доказаны свойства реле: автономность, вольтерровость (причинность), полугрупповое свойство, статичность, управляемость и доказано утверждение о периодических входах и выходах.

Во второй главе предлагается описание реле с гистерезисом, записываемое в виде обыкновенного дифференциального уравнения с большим параметром (см. [53] и [54]). Такое описание удобно для численного анализа с применением современных пакетов прикладных программ. Оно может быть полезным и для качественного исследования систем управления методами теории дифференциальных уравнений. Изучается вопрос о погрешности гладкого описания по отношению к известному дискретному локально явному описанию (2). Основной результат заключается в

том, что для некоторого класса систем релейного управления поведения таких систем с гладким описанием равномерно на любом временном промежутке стремятся к соответствующим поведениям с локально явным описанием при стремлении параметра в гладком описании к бесконечности. Найдены оценки близости этих поведений, рассмотрен частный случай. Построение и исследование такого описания составляет предмет данной главы.

В параграфе 2.1 дано *гладкое* описание реле:

$$\begin{cases} \dot{w} = K[(x - \beta)_+(1 - w) - (\alpha - x)_+w], \\ \tilde{y} = \text{int}(w + \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь: $w = w(t)$ – промежуточная (гладкая) выходная функция; K – большой параметр; $x = x(t)$ – входная непрерывная функция; $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ – (дискретная) выходная функция; x_+ – *положительная часть числа* x , т.е. $\max\{0, x\}$; $\text{int}(x)$ – *непрерывная слева целая часть числа* x , т.е. наибольшее целое число, меньшее x .

Для выхода реле в гладком описании (8), соответствующего входу x и начальному условию $\tilde{y}(t_0) = w(t_0) = y_0$, будем использовать обозначение $\tilde{R}_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)$.

В параграфе 2.2 доказана теорема о степени несовпадения выходов гладкого и локально явного описания: *пусть непрерывная функция x в точках локального минимума и максимума не принимает значение, соответственно, α и β . Тогда на любом конечном отрезке $[t_0, T]$ степень несовпадения выходов локально явного и гладкого реле, характеризующаяся следующей величиной*

$$\mu = \mu\{t \in [t_0, T] : R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0) \neq \tilde{R}_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)\},$$

стремится к 0 при $K \rightarrow +\infty$.

В параграфах 2.3 – 2.5 сформулирована и доказана теорема о близости. Рассматриваются следующие две системы:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u, y), \\ x(t) = \varphi(u(t)), \\ y(t) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{u}} = f(t, \tilde{u}, \tilde{y}), \\ \tilde{x}(t) = \varphi(\tilde{u}(t)), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{R}_{t_0}^t(\alpha, \beta, \tilde{x})(y_0), \\ \tilde{u}(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (10)$$

В системе (9) $y(t)$ есть выходная функция локально явного описания, определяемого уравнением (2); в системе (10) $\tilde{y}(t)$ есть выходная функция гладкого описания, определяемого уравнением (8). Теорема о близости формулируется следующим образом: *при некоторых условиях на функции f и φ для любого решения $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$) системы (9) существуют такие константы C и K_0 , что при $K \geq K_0$ решение $\tilde{u}(t)$ системы (10) удовлетворяет неравенству:*

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| \leq \frac{C}{\sqrt{K}} \quad (t_0 \leq t \leq T).$$

Доказательство этой теоремы проводится с помощью леммы о зависимости решений от начальных данных и параметра (в п. 2.5.1) и следующих утверждений (в п. 2.5.2 – 2.5.5): утверждения об оценке времени срабатывания гладкого реле; утверждения о близости поверхностей уровня; утверждения об оценке промежутка между выходами на пороговые значения и утверждения об оценке близости.

В параграфе 2.6 изучается частный случай, в котором рассматриваемые системы (9) и (10) являются скалярными. Тогда при некоторых условиях на функции f указанную оценку для C в теореме о близости можно улучшить, а параметр $K > 0$ в (8) можно выбирать произвольно.

В третьей главе рассматриваются примеры анализа некоторых систем

с релейным управлением. В параграфе 3.1 изучается система с одним реле на плоскости:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2y(t) & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 - 2y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $y(t)$ – выход реле в виде локально явного уравнения с положительными пороговыми значениями α, β и входной функцией $x(t) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. При этом доказывается критерий периодичности решений: *для того, чтобы начиная с некоторого момента, решение системы (11) было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы $\varepsilon \in \tilde{\mathbb{Q}} = \frac{\pi}{\ln \beta - \ln \alpha} \mathbb{Q}$.* Кроме того, в этом параграфе проводятся некоторые эксперименты численного анализа на основе гладкого описания реле.

В параграфе 3.2 исследуется вопрос о существовании периодического решения системы с двумя реле (см. [49] и [50]):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ x(0) = x_0, \\ y = y_1 + y_2, \\ y_1(t) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_{01}), \\ y_2(t) = R_{t_0}^t(\gamma, \delta, x)(y_{02}). \end{cases} \quad (12)$$

Для случая, когда пороговые значения двух реле вложены, именно, $\gamma < \alpha$ и $\beta < \delta$, в этом параграфе сформулировано и доказано утверждение о существовании периодического решения: *пусть функции $f(x, 0), f(x, 1), f(x, 2)$ удовлетворяют локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned} &\text{на } [\alpha, +\infty) \quad f(x, 2) < 0, \\ &\text{на } (-\infty, \beta] \quad f(x, 0) > 0, \\ &\text{на } \left[\gamma, \frac{\alpha + \beta}{2}\right] \quad f(x, 1) < 0, \end{aligned}$$

на $(\frac{\alpha+\beta}{2}, \delta]$ $f(x, 1) \geq r > 0$, причём
 существует конечный предел $f(x, 1)$ при $x \rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} + 0$.

Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\alpha+\beta}{2}\}$ каждое решение системы (12), начиная с некоторого момента, является периодическим вправо и любые два решения этой системы, начиная с некоторого момента, совпадают с точностью до сдвига по времени.

В параграфе 3.3 изучается бесконечная система реле с пороговыми значениями $(-n, n)$ ($n \in \mathbb{N}$), общей входной функцией $x(t)$ и выходными функциями n -ого реле $y_n(t)$ в виде локально явного уравнения (2). Выходная функция бесконечной системы реле определяется следующей формулой:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} R_{t_0}^t(-n, n, x)(y_{n0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} y_n(t), \quad -\infty \leq t_0 \leq t.$$

В этом параграфе доказаны утверждения о существовании и единственности периодического выхода бесконечной системы реле с любым наперед заданным средним значением из некоторого отрезка, однозначно определяемого входной функцией.

В четвертой главе для гистерезисных преобразователей упора и люфта предложены гладкие описания в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром (см. [51] и [52]). Описания упора и люфта, построенные в этой главе, отличаются от описаний, изучаемых в [19], тем, что с помощью *сглаженной* входной функции $\xi(t)$ для непрерывной входной функции $x(t)$ ($t \in [t_0, T]$) (см. параграф 4.1) они определяются сразу для любых непрерывных функций, а не только кусочно гладких входов. Именно, гладкие выходные функции упора $u(t)$ и люфта $v(t)$, соответствующие непрерывному входу $x(t)$ и (большому) параметру K , зададим уравнениями:

$$\dot{u} = \dot{\xi} + K[(-u(t))_+ - (u(t) - 1)_+], \quad (13)$$

$$\dot{v} = K[(\xi(t) - v(t))_+ - (v(t) - 1 - \xi(t))_+], \quad (14)$$

где $\xi = \xi(t)$ – *сглаженная* входная функция для непрерывной входной функции $x(t)$.

В параграфе 4.2 доказано утверждение об оценке близости выходов упора с гладким входом при гладком и классическом описаниях. С помощью этого утверждения в параграфах 4.3 и 4.4 сформулированы и доказаны утверждения об оценке близости между выходами упора (люфта) для гладких и классических описаний, в которых входная функция является непрерывной; полученные оценки выражаются через модуль непрерывности входной функции $\omega(x, \frac{1}{K})$ (см. параграф 4.3).

Для упора утверждение формулируется следующим образом: *пусть $\varphi(t)$, $u(t)$ – решения, соответственно, уравнения (3) и (13), удовлетворяющие начальным условиям:*

$$\varphi(t_0) = u(t_0) = u_0.$$

Тогда для любого $K > 0$ на $[t_0, T]$ будет верна следующая оценка:

$$|u(t) - \varphi(t)| \leq 3\omega(x, \frac{1}{K}).$$

Для люфта утверждение формулируется следующим образом: *пусть $\psi(t)$, $v(t)$ – решения, соответственно, уравнения (4) и (14), удовлетворяющие начальным условиям:*

$$\psi(t_0) = v(t_0) = v_0.$$

Тогда для любого $K > 0$ на $[t_0, T]$ будет верна следующая оценка:

$$|v(t) - \psi(t)| \leq 2\omega(x, \frac{1}{K}).$$

В параграфе 4.5 на основе гладкого описания упора и люфта приводятся эксперименты численного анализа, в которых получены приближенные решения систем (3) и (4) с непрерывной входной функцией.

В последней главе изучается гладкое описание системы с диодной нелинейностью (см. [55]). Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью вида (7) построена и изучена

близкая к ней система с непрерывной правой частью и большим параметром K . Такое *гладкое* описание определяется следующим уравнением (см. параграф 5.1):

$$\dot{y} = f(t, \bar{y}) - K(y - \bar{y}). \quad (15)$$

Здесь $\bar{y} = P(y, Q)$ – проекция y на Q – непустое замкнутое выпуклое множество в \mathbb{R}^n , K – большой параметр; для $t \in [t_0, t_0 + T]$ и $x \in Q$ функция $f(t, x)$ непрерывна по t при фиксированном x , удовлетворяет условию Липшица с константой L и ограничена по норме константой C .

В параграфе 5.2 доказана теорема о точности гладкого описания системы с диодной нелинейностью: *пусть $x(t), y(t)$ – решения систем (7), (15), соответственно, удовлетворяющие одинаковым начальным условиям:*

$$x(t_0) = y(t_0) = x_0 \in Q.$$

Тогда при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ верна следующая оценка:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \frac{Ce^{LT}}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

В частном случае (в параграфе 5.3) по сравнению с (15) введено и другое гладкое описание – более эффективное, не использующее оператора проектирования. В двумерном пространстве \mathbb{R}^2 рассмотрим множество Q как пересечение двух полупространств Q_1 и Q_2 , которые являются множествами векторов z , соответственно, удовлетворяющих при некоторых фиксированных единичных $n_i \in \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2$) неравенствам $(n_i, z) \leq 0$. Пусть n_1, n_2 не коллинеарны и $\omega \in (0, \pi)$ – меньший из двух углов между этими векторами. В частном случае *гладкое описание* определяется следующим уравнением:

$$\dot{z} = f(t, z) - K \max\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\} \sum_{l \in M(z)} n_l, \quad (16)$$

где

$$l \in M(z) \Leftrightarrow (n_l, z) = \max\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\}.$$

С помощью теоремы 5.2, в этом параграфе доказана теорема о близости решений соответствующих начальных задач порядка $1/\sqrt{K}$: пусть $x(t), z(t)$ – решения систем (7), (16), соответственно, удовлетворяющие начальным условиям:

$$z(t_0) = x(t_0) = x_0 \in Q.$$

Тогда при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ справедлива следующая оценка:

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \frac{Ce^{LT}}{\sqrt{L \min\{2 \cos \frac{\omega}{2}, 1\} \cos \frac{\omega}{2}}} \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

В параграфе 5.4 рассматривается электрическая цепь, которая состоит из сопротивления R , индуктивности \tilde{L} и источника ЭДС, подключенного с помощью диодного двухполупериодного выпрямителя (см. [25]). Описание этой цепи приводится к дифференциальному уравнению вида (7) (см. [27]) и соответствующей гладкой модели (16). С помощью теоремы предыдущего параграфа получена оценка близости соответствующих решений.

В параграфе 5.5 сформулирована и доказана обобщенная теорема о существовании и единственности предельного цикла. Она отличается от теоремы, сформулированной в [22], тем, что в обобщенной теореме выделенная внутренняя точка множества Q не обязательно является нулевой.

В параграфе 5.6 рассматривается пример применения этой обобщенной теоремы. Пусть множество $Q \subset \mathbb{R}^2$ есть некоторый выпуклый четырехугольник. На этом множестве рассматривается система (7), в которой функция f не зависит от t , именно, рассмотрим $f(x) = A(x - x_*)$, где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\varepsilon \\ \varepsilon & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \varepsilon > 0 \text{ и } x_* \in \text{int}Q$$

(см. п. 5.6.1). В пункте 5.6.2 доказана теорема, в которой найдено достаточное условие на параметр $\varepsilon > 0$ для того, чтобы все условия в обобщенной теореме были выполнены.

В параграфе 5.7 на основе (16) определено гладкое описание для примера из предыдущего параграфа. При этом, доказана теорема об оценке

близости между решениями классического и гладкого описания. Кроме того, приводятся некоторые эксперименты численного анализа и для одного конкретного получена оценка близости между соответствующими решениями.

1 Предварительные результаты для изучения систем с релейным управлением

1.1 Утверждение об практической эквивалентности описания реле в виде локально явного уравнения явному описанию по Красносельскому – Покровскому

Пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ – решения на $[t_0, T]$, соответственно, уравнения (1) и (2), которые удовлетворяют одинаковым начальным условиям: $y_1(t_0) = y_0 = y_2(t_0)$. Пусть (x_0, y_0) есть допустимое состояние реле в описаниях (1) и (2).

Тогда $y_1(t) = y_2(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$, кроме точек переключения реле в этих описаниях.

Уточним, что точку t_* мы называем *точкой переключения* реле, если в этой точке разрывна его выходная функция.

Доказательство. Сначала обозначим через E остаток промежутка $[t_0, T]$ после удаления из него точек переключения реле в том или ином описании (1) и (2). Из условия допустимого состояния реле в точке t_0 нетрудно проверить, что эта точка не является точкой переключения реле в этих двух описаниях, т.е. $t_0 \in E$. Кроме этого, видно, что на множестве E функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются непрерывными. Мы должны доказать, что они равны при всех $t \in E$. Предположим противное, тогда существует такой момент $t_1 \in [t_0, T]$, что

$$t_1 = \inf\{t \in E : y_1(t) \neq y_2(t)\}. \quad (17)$$

Заметим, что t_1 может не быть точкой множества E и из непрерывности функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ на этом множестве непосредственно следует, что $y_1(t_1) = y_2(t_1)$. С другой стороны, в точке t_1 может быть: $x(t_1) \leq \alpha$, $x(t_1) \geq \beta$ или $\alpha < x(t_1) < \beta$.

Рассмотрим первый случай, когда $x(t_1) \leq \alpha$ и, следовательно, при всех достаточно малых положительных dt $y_2(t_1 + dt) = 0$ (см. уравнение (2)). Если $x(t_1) < \alpha$, то в силу непрерывности входа $x(t_1 + dt) < \alpha$.

Тогда из (1) вытекает, что $y_1(t_1 + dt) = 0$. Если $x(t_1) = \alpha$, то также в силу непрерывности входа $x(t_1 + dt) < \beta$ при всех достаточно малых $dt > 0$, значит, $y_1(t_1 + dt) = 0$ в силу первой строки из уравнения (1). Итак, в этом случае, доказано, что при всех достаточно малых $dt > 0$ справедливо

$$y_1(t_1 + dt) = y_2(t_1 + dt). \quad (18)$$

Аналогично, (18) будет верно в случае, когда $x(t_1) \geq \beta$. Далее, рассмотрим последний случай, когда $\alpha < x(t_1) < \beta$ и снова в силу непрерывности входа $\alpha < x(t_1 + dt) < \beta$ при всех достаточно малых $dt > 0$. Поскольку $y_1(t_1) = y_2(t_1)$, то (18) непосредственно следует из третьей строки в уравнениях (1) и (2). Таким образом, во всех случаях доказана справедливость (18) при всех достаточно малых $dt > 0$, тем самым, получено противоречие с определением точки t_1 в (17). Утверждение полностью доказано.

1.2 Свойства реле $R_{t_0}^t$

1.2.1 Автономность

При всех $t \in [t_0, T]$ справедливо следующее равенство:

$$R_{t_0-c}^{t-c}(\alpha, \beta, S_c x)(y_0) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0), \quad (19)$$

где $S_c x(t) = x(t + c)$.

Доказательство. Обозначим $y(t) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)$, где $t \in [t_0, T]$. Теперь рассмотрим сдвинутую входную функцию $S_c x(t) = x(t + c)$. Обозначим через $\bar{y}(t)$ решение уравнения (2) на $[t_0 - c, T - c]$ при входной функции $S_c x$ и начальном значении $\bar{y}(t_0 - c) = y_0$, т. е.

$$\bar{y}(t + dt) + o(dt) = \begin{cases} \bar{y}(t), & \text{если } \alpha < x(t + c) < \beta, \\ 1, & \text{если } x(t + c) \geq \beta, \\ 0, & \text{если } x(t + c) \leq \alpha. \end{cases} \quad (20)$$

В уравнении (20) заменим t на $t - c$ и получим, что $\bar{y}(t - c)$ является решением уравнения (2). Кроме этого, $\bar{y}(t_0 - c) = y(t_0)$, тогда из утверждения о существовании и единственности решения уравнения (2) следует, что $\bar{y}(t - c) = y(t)$ на $[t_0, T]$, т. е. верно (19).

1.2.2 Вольтерровость – причинность

Если $x(t) = \bar{x}(t)$ на $[t_0, T]$, то при этих значениях t

$$R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, \bar{x})(y_0). \quad (21)$$

Доказательство. Поскольку $x(t) = \bar{x}(t)$ на $[t_0, T]$, то обе функции $R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)$ и $R_{t_0}^t(\alpha, \beta, \bar{x})(y_0)$ являются решениями уравнения (2), т.е. равенство (21) справедливо.

1.2.3 Полугрупповое свойство

При всех $t_1 \in [t_0, t]$ верно:

$$R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)R_{t_0}^{t_1}(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0). \quad (22)$$

Доказательство. Пусть левая часть равенства (22) определена и равна y . Из утверждения о существовании и единственности решения уравнения (2) следует, что существуют единственные φ, ψ – решения (2), такие, что $\varphi(t_0) = y_0$, $\varphi(t_1) = y_1$ и $\psi(t_1) = y_1$, $\psi(t) = y$. Отсюда следует, что существует такое единственное решение $\phi(t)$ уравнения (2), что $\phi(t_0) = y_0$ и $\phi(t) = y$, т. е. правая часть (22) определена и равна y . Нетрудно видеть также, что если определена правая часть равенства (22), то определена и левая, поскольку $t_0 \leq t_1 \leq t$.

1.2.4 Статичность

Дополнительно к свойству автономности справедливо равенство

$$R_{t_0}^{\theta t + (1-\theta)t_0}(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, \bar{x})(y_0), \quad (23)$$

где $\theta > 0$ и $\bar{x}(t) = x(\theta t + (1 - \theta)t_0)$.

Доказательство. Обозначим $y(t), \bar{y}(t)$ – решения уравнения (2), соответственно, с входными x и \bar{x} . Мы должны доказать, что

$$y(\theta t + (1 - \theta)t_0) = \bar{y}(t).$$

В уравнении (2) заменим t на $\theta t + (1 - \theta)t_0$ и в силу $\bar{x}(t) = x(\theta t + (1 - \theta)t_0)$ получим, что обе функции $y(\theta t + (1 - \theta)t_0)$ и $\bar{y}(t)$ являются решениями этого уравнения при входе \bar{x} . Кроме этого,

$$y(\theta t_0 + (1 - \theta)t_0) = y_0 = \bar{y}(t_0),$$

тогда из утверждения о существовании и единственности решения (2) следует, что $y(\theta t + (1 - \theta)t_0) = \bar{y}(t)$, т. е. доказана справедливость равенства (23).

1.2.5 Управляемость

Для любых допустимых состояний реле (x_0, y_0) и (x_1, y_1) существует непрерывная входная функция $x(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), для которой

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \text{ и } R_{t_0}^{t_1}(\alpha, \beta, x)(y_0) = y_1. \quad (24)$$

Доказательство. Будем доказывать это свойство в двух случаях. Первый случай, когда $y_1 = 1$, и тогда необходимо выполнено условие $x_1 \geq \alpha$. Теперь в качестве $x(t)$ возьмем функцию, график которой является выпуклой вверх параболой; он проходит через (t_0, x_0) , (t_1, x_1) и имеет вершину в точке $(\frac{t_0+t_1}{2}, \max\{x_0, x_1\} + \beta - \alpha)$. Нетрудно проверить, что построенная входная функция будет удовлетворять всем условиям в (24), так как в момент $\frac{t_0+t_1}{2}$ значения входа не меньше верхнего значения β и значит, после этого момента реле включено ($y = 1$) до момента, в который вход достигает нижнего порогового значения α , следовательно, $y_1 = y(t_1) = 1$.

По аналогии с этими, в случае $y_1 = 0$ также можно построить входную функцию, удовлетворяющую всем условиям в (24). В качестве ее возьмем функцию, график которой является выпуклой снизу

параболой; он проходит через (t_0, x_0) , (t_1, x_1) и имеет вершину в точке $(\frac{t_0+t_1}{2}, \min\{x_0, x_1\} + \alpha - \beta)$.

1.3 Определение $R_{-\infty}^t$

Введем определение функции $R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)$:

если существует такое $t_1 < t$, что $x(t_1) \leq \alpha$ или $x(t_1) \geq \beta$, то

$$R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)(y_1),$$

где $y_1 = 0$ при $x(t_1) \leq \alpha$ и $y_1 = 1$ при $x(t_1) \geq \beta$;

если $x(t_1) \in (\alpha, \beta)$ при всех $t_1 < t$, то

$$R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = y_0;$$

кроме этого, будем считать, что

$$R_{-\infty}^{-\infty}(\alpha, \beta, x)(y_0) = y_0.$$

Теперь докажем корректность этого определения, т. е. его независимость от t_1 . Возьмем такое $t_2 < t$, что $x(t_2) \leq \alpha$ или $x(t_2) \geq \beta$. Требуется доказать, что

$$R_{t_2}^t(\alpha, \beta, x)(y_2) = R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)(y_1), \quad (25)$$

где $y_i = 0$, если $x(t_i) \leq \alpha$, и $y_i = 1$, если $x(t_i) \geq \beta$ при $i = 1, 2$. Пусть, для определенности, $t_2 \leq t_1$, тогда в силу полугруппового свойства (см. п. 1.2.3)

$$R_{t_2}^t(\alpha, \beta, x)(y_2) = R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)R_{t_2}^{t_1}(\alpha, \beta, x)(y_2). \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что в силу $x(t_1) \leq \alpha$ или $x(t_1) \geq \beta$ в момент $t_1 < t$ получим:

$$R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)R_{t_2}^{t_1}(\alpha, \beta, x)(y_2) = R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)(y_1). \quad (27)$$

Заметим, что в правой части равенства (27) значение y_1 не обязательно совпадает со значением $R_{t_2}^{t_1}(\alpha, \beta, x)(y_2)$. Из равенств (26) и (27) непосредственно следует (25), т.е. доказана корректность определения $R_{-\infty}^t$.

1.4 Свойства $R_{-\infty}^t$

Будем доказывать, что $R_{-\infty}^t$ обладает всеми свойствами $R_{t_0}^t$.

1.4.1 Автономность

$$R_{-\infty}^{t-c}(\alpha, \beta, S_c x)(y_0) = R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0),$$

где $S_c x(t) = x(t + c)$.

Доказательство. Если $t = -\infty$, то по определению

$$R_{-\infty}^{-\infty}(\alpha, \beta, S_c x)(y_0) = R_{-\infty}^{-\infty}(\alpha, \beta, x)(y_0) = y_0.$$

Если $x(t_1) \in (\alpha, \beta)$ при всех $t_1 < t$, то возьмем $\bar{t}_1 = t_1 - c$. Отсюда следует, что при всех $\bar{t}_1 < t - c$ выполняется $S_c x(\bar{t}_1) \in (\alpha, \beta)$, так как $S_c x(\bar{t}_1) = x(\bar{t}_1 + c) = x(t_1)$. По определению $R_{-\infty}^t$ получим, что

$$R_{-\infty}^{t-c}(\alpha, \beta, S_c x)(y_0) = R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = y_0.$$

В случае, когда существует такое $t_1 < t$, что $x(t_1) \geq \beta$ или $x(t_1) \leq \alpha$, то мы возьмем $\bar{t}_1 = t_1 - c$. Отсюда следует, что $\bar{t}_1 < t - c$ и $S_c x(\bar{t}_1) \geq \beta$ или $S_c x(\bar{t}_1) \leq \alpha$, так как $S_c x(\bar{t}_1) = x(t_1)$. По определению $R_{-\infty}^t$ и в силу (19) получим, что

$$\begin{aligned} R_{-\infty}^{t-c}(\alpha, \beta, S_c x)(y_0) &= R_{\bar{t}_1}^{t-c}(\alpha, \beta, S_c x)(y_1) = \\ &= R_{t_1-c}^{t-c}(\alpha, \beta, S_c x)(y_1) = R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)(y_1) = R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0), \end{aligned}$$

где $y_1 = 1$ если $x(t_1) \geq \beta$ и $y_1 = 0$ если $x(t_1) \leq \alpha$.

1.4.2 Вольтерровость – причинность

Если $x(t) = \bar{x}(t)$ при $-\infty \leq t \leq T$, то при этих значениях t

$$R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, \bar{x})(y_0).$$

Это свойство очевидно.

1.4.3 Полугрупповое свойство

При всех $\tau \in [-\infty, t]$ справедливо следующее равенство:

$$R_\tau^t(\alpha, \beta, x)R_{-\infty}^\tau(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0). \quad (28)$$

Доказательство. В случае, когда $\tau = -\infty$, то равенство (28) очевидно, так как $R_{-\infty}^{-\infty}(\alpha, \beta, x)(y_0) = y_0$.

В случае, когда $-\infty < \tau$ и если существует $t_1 < \tau$ такое, что $x(t_1) \leq \alpha$ или $x(t_1) \geq \beta$, то

$$R_{-\infty}^\tau(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{t_1}^\tau(\alpha, \beta, x)(y_1)$$

и

$$R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)(y_1),$$

где $y_1 \in \{0, 1\}$ (см. параграф 1.3). Из последних двух равенств и свойства полугруппового в пункте 1.2.3 непосредственно следует (28).

Теперь рассмотрим последний случай, когда $-\infty < \tau$ и $x(s) \in (\alpha, \beta)$ при $s \in (-\infty, \tau)$. Тогда

$$R_\tau^t(\alpha, \beta, x)R_{-\infty}^\tau(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_\tau^t(\alpha, \beta, x)(y_0), \quad (29)$$

так как $R_{-\infty}^\tau(\alpha, \beta, x)(y_0) = y_0$. В силу равенства (29) легко заметить, что для доказательства (28) достаточно показать:

$$R_\tau^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0). \quad (30)$$

Если $x(s) \in (\alpha, \beta)$ при $s \in [\tau, t]$, то поскольку $x(s) \in (\alpha, \beta)$ при $s \in (-\infty, \tau)$ получим, что

$$R_\tau^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = y_0 = R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0),$$

т.е. получается (30). Если существует такое $t_1 \in [\tau, t]$, что $x(t_1) \leq \alpha$ или $x(t_1) \geq \beta$, то по определению $R_{-\infty}^t$ мы имеем:

$$R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)(y_1), \quad (31)$$

где $y_1 = 0$, если $x(t_1) \leq \alpha$ и $y_1 = 1$, если $x(t_1) \geq \beta$. С другой стороны, в силу полугруппового свойства в пункте 1.2.3 верно следующее равенство

$$R_\tau^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)R_\tau^{t_1}(\alpha, \beta, x)(y_0).$$

По аналогии с доказательством корректности $R_{-\infty}^t$ последнее равенство можно записать в виде

$$R_\tau^t(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{t_1}^t(\alpha, \beta, x)(y_1),$$

из этого и (31) непосредственно следует (30). Свойство 1.4.3 полностью доказано.

1.4.4 Статичность

Если $\theta > 0$ и $\bar{x}(t) = x(\theta t + (1 - \theta)t_0)$, то верно следующее равенство

$$R_{-\infty}^{\theta t + (1 - \theta)t_0}(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, \bar{x})(y_0). \quad (32)$$

Доказательство. Если $t = -\infty$, то равенство (32) очевидно верно, так как по определению $R_{-\infty}^t$ обе его части равны y_0 . Рассмотрим случай, когда $t > -\infty$, тогда для определения $R_{-\infty}^{\theta t + (1 - \theta)t_0}(\alpha, \beta, x)(y_0)$ возьмем $t_1 = \theta \bar{t}_1 + (1 - \theta)t_0$, где \bar{t}_1 – момент в определении $R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, \bar{x})(y_0)$. Если $\bar{x}(\bar{t}_1) \in (\alpha, \beta)$ при всех $\bar{t}_1 < t$, то $x(t_1) \in (\alpha, \beta)$ (так как $x(t_1) = x(\theta \bar{t}_1 + (1 - \theta)t_0) = \bar{x}(\bar{t}_1)$) при всех $t_1 < \theta t + (1 - \theta)t_0$. Отсюда вытекает, что обе части в (32) равны y_0 и, следовательно, равенство (32) справедливо. Если существует такое $\bar{t}_1 < t$, что $\bar{x}(\bar{t}_1) \leq \alpha$ или $\bar{x}(\bar{t}_1) \geq \beta$, то $x(t_1) \leq \alpha$ или $x(t_1) \geq \beta$, где

$$t_1 = \theta \bar{t}_1 + (1 - \theta)t_0 < \theta t + (1 - \theta)t_0.$$

Нетрудно видеть, что для доказательства (32) достаточно доказать, что

$$R_{t_1}^{\theta t + (1 - \theta)t_0}(\alpha, \beta, x)(y_1) = R_{\bar{t}_1}^t(\alpha, \beta, \bar{x})(y_1), \quad (33)$$

где $y_1 = 0$, если $\bar{x}(\bar{t}_1) \leq \alpha$ и $y_1 = 1$, если $\bar{x}(\bar{t}_1) \geq \beta$. По аналогии с доказательством равенства (23) в пункте 1.2.4 получим, что обе функции

$y(\theta t + (1 - \theta)t_0)$ и $\bar{y}(t)$ являются решениями уравнения (2) при входе \bar{x} . Кроме этого,

$$y(\theta\bar{t}_1 + (1 - \theta)t_0) = y_1 = \bar{y}(\bar{t}_1),$$

тогда из утверждения о единственности решения (2) вытекает, что

$$y(\theta t + (1 - \theta)t_0) = \bar{y}(t),$$

т. е равенство (33) верно и отсюда непосредственно следует справедливость равенства (32).

1.4.5 Управляемость

Для любых допустимых состояний реле y_0 и (x_1, y_1) существует непрерывная входная функция $x(t)$ ($-\infty \leq t \leq t_1$), для которой

$$x(t_1) = x_1 \text{ и } R_{-\infty}^{t_1}(\alpha, \beta, x)(y_0) = y_1.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что в качестве входа можно взять непрерывную на $(-\infty, t_1]$ функцию, принимающую значение x_1 в точке t_1 и удовлетворяющую условию: существует такое $t_* < t_1$, что при всех $t \in (t_*, t_1)$ $\alpha < x(t) < \beta$ и $x(t_*) = \alpha$ при $y_1 = 0$ ($x(t_*) = \beta$ при $y_1 = 1$).

1.5 Утверждение о периодических входах и выходах

Для любого непрерывного T -периодического входа x и значения $y_0 \in \{0, 1\}$ выход $y(t) = R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)$ является T -периодическим. Он не зависит от y_0 , если $x(t_) \in (-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$ для некоторого t_* ; в противном случае входу x соответствуют два периодических выхода: $y(t) \equiv 0$ при $y_0 = 0$ и $y(t) \equiv 1$ при $y_0 = 1$.*

Доказательство. Легко заметить, что выход, соответствующий непрерывному T -периодическому входу, является T -периодическим, поскольку в силу свойства автономности реле $R_{-\infty}^t$ (см. п. 1.4.1) получим:

$$R_{-\infty}^{t-T}(\alpha, \beta, x)(y_0) = R_{-\infty}^{t-T}(\alpha, \beta, S_T x)(y_0) = R_{-\infty}^t(\alpha, \beta, x)(y_0),$$

где $S_T x(t) = x(t + T)$.

Пусть существует такое t_* , что $x(t_*) \in (-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$. Для определенности будем считать, что $x(t_*) \geq \beta$, тогда $y(t) = R_{t_*}^t(\alpha, \beta, x)(1)$ при всех $t > t_*$. Поскольку T -периодический выход $y(t)$ полностью определяется своими значениями при $t > t_*$, мы получаем, что он не зависит от y_0 .

Последняя часть утверждения непосредственно вытекает из определения $R_{-\infty}^t$.

2 Гладкое описание реле с гистерезисом

2.1 Постановка задачи

Гладкое описание реле определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{w} = K[(x - \beta)_+(1 - w) - (\alpha - x)_+w], \\ \tilde{y} = \text{int}(w + \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (34)$$

Здесь:

$w = w(t)$ – промежуточная (гладкая) выходная функция,

K – большой параметр,

$x = x(t)$ – входная непрерывная функция,

$\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ – (дискретная) выходная функция,

x_+ – положительная часть числа x , т.е. $\max\{0, x\}$,

$\text{int}(x)$ – непрерывная слева целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, меньшее x (в целочисленных точках значения $\text{int}(x)$ на единицу меньше соответствующих значений традиционной функции $[x]$).

На интервалах оси времени, в которых $x(t) < \alpha$, изменение гладкого выхода описывается уравнением $\dot{w} = -K(\alpha - x(t))w$. Оно имеет единственное положение равновесия $w = 0$, которое глобально асимптотически устойчиво. Аналогично, на интервалах, где $x(t) > \beta$, гладкий выход удовлетворяет уравнению $\dot{w} = K(x(t) - \beta)(1 - w)$ с глобально асимптотически устойчивым положением равновесия $w = 1$. Большой параметр K обеспечивает быстрое приближение гладкого выхода к соответствующему положению равновесия. При $\alpha \leq x(t) \leq \beta$ гладкий выход сохраняет постоянное значение, так как $\dot{w} = 0$.

Нетрудно видеть, что

$$w(t_0) \in [0, 1] \Rightarrow w(t) \in [0, 1] \quad (t \geq t_0). \quad (35)$$

Действительно, если, например $w(t) > 1$, при $t \in (t_1, t_2]$ и $w(t_1) = 1$, то $\dot{w}(\theta) > 0$ в некоторой точке $\theta \in (t_1, t_2)$. Но это противоречит (34).

Дискретный выход $\tilde{y}(t)$ при $w \in [0, \frac{1}{2}]$ равен нулю, а при $w \in (\frac{1}{2}, 1]$ – единице. Для выхода гладкого описания реле, соответствующего входу x и начальному условию $\tilde{y}(t_0) = w(t_0) = y_0$, будем использовать обозначение $\tilde{R}_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)$.

Для численного анализа систем релейного управления, а также для качественного исследования с применением численных экспериментов можно использовать современные пакеты прикладных программ. При этом гладкое описание реле с гистерезисом, построенное на основе обыкновенного дифференциального уравнения, оказывается наиболее удобным. Построение и исследование такого описания составляет предмет данной главы.

2.2 Теорема о степени несовпадения выходов гладкого и локально явного описания

Пусть непрерывная функция x в точках локального минимума и максимума не принимает значение, соответственно, α и β .

Тогда на любом конечном отрезке $[t_0, T]$ степень несовпадения выходов локально явного и гладкого реле, характеризующаяся следующей величиной

$$\mu = \mu\{t \in [t_0, T] : R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0) \neq \tilde{R}_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)\},$$

стремится к 0 при $K \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Будем доказывать эту теорему в двух случаях. Первый случай, когда на $[t_0, T]$ локально явное реле не переключается, следовательно, при этих t значение выхода реле не меняется, и, тем самым: $x(t) < \beta$ если $y_0 = 0$ или $x(t) > \alpha$ если $y_0 = 1$. Рассмотрим ситуацию, когда на $[t_0, T]$ $x(t) < \beta$ и $y_0 = 0$. На этом промежутке времени $y(t) = 0$ и $\dot{w} = -K(\alpha - x)_+ w$, тогда

$$w(t) = w_0 e^{-K \int_{t_0}^t (\alpha - x(s))_+ ds} = 0 = y(t),$$

следовательно, $\tilde{y}(t) = y(t) = 0$. Доказательство приводится аналогично

для ситуации, когда $x(t) > \alpha$ и $y_0 = 1$. Таким образом, доказано, что $\mu = 0$ в первом случае.

Второй случай, когда локально явное реле переключается на $[t_0, T]$. На этом интервале времени построим последовательность $(t_j : j \in \mathbb{N})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t_j) = \alpha \text{ и } x(t) < \beta \text{ при всех } t \in [t_j, t_{j+1}), \\ x(t_{j+1}) = \beta \text{ и } x(t) > \alpha \text{ при всех } t \in [t_{j+1}, t_{j+2}), \end{aligned}$$

т.е. построим последовательность точек, в которых локально явное реле переключается. Положим $\Delta = \inf_{j \in \mathbb{N}} \{t_{j+1} - t_j\}$. В силу равномерной непрерывности $x(t)$ на $[t_0, T]$ можно утверждать, что $\Delta > 0$. Отсюда следует, что последовательность $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ является конечной, количество элементов которой не превосходит следующего числа:

$$m = \left[\frac{T - t_0}{\Delta} \right] + 1. \quad (36)$$

В силу условия на входную функцию $x(t)$ получим, что для каждой точки t_j ($1 \leq j \leq m$) существует такое положительное число δ_j , что при всех $t \in (t_j, t_j + \delta_j)$ будет выполнено неравенство $x(t) < \alpha$ при $x(t_j) = \alpha$ и $x(t) > \beta$ при $x(t_j) = \beta$. Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon > 0$ и, после этого, определим:

$$\delta = \min \left\{ \min_{1 \leq j \leq m} \{\delta_j\}, \frac{\varepsilon}{m+1} \right\} > 0. \quad (37)$$

Поскольку на $[t_0, t_1]$ значение выхода реле в виде локально явном описании (2) не меняется, то из доказательства в первом случае следует, что $\tilde{y}(t) = y(t) = y_0$ при всех $t \in [t_0, t_1]$. Рассмотрим любой полуинтервал $(t_j, t_{j+1}]$ и пусть $x(t_j) = \alpha$, тогда по определению точки t_j получим, что при этих значениях t

$$\dot{w} = -K(\alpha - x)_+ w.$$

Отсюда вытекает, что функция $w(t)$ является убывающей на $(t_j, t_{j+1}]$. В частности, при $t \in (t_j, t_j + \delta]$

$$\dot{w} = -K(\alpha - x)w$$

и, следовательно,

$$w(t) = w_j e^{-K \int_{t_j}^t (\alpha - x(s)) ds}. \quad (38)$$

Для этого j определим числа a_j и M_j :

$$\begin{aligned} a_j &= \int_{t_j}^{t_j + \delta} (\alpha - x(s)) ds; \\ M_j a_j &> \ln 2. \end{aligned} \quad (39)$$

Так как $w_j \in [0, 1]$ (см. (35)), то из (38) и (39) нетрудно проверить, что при $K \geq M_j$

$$0 \leq w(t_j + \delta) = w_j e^{-K a_j} < \frac{1}{2}.$$

В силу последней оценки и убывания функции $w(t)$ на $(t_j, t_{j+1}]$ получим, что при всех $t \in [t_j + \delta, t_{j+1}]$

$$0 \leq w(t) \leq w(t_j + \delta) < \frac{1}{2},$$

следовательно, $\tilde{y}(t) = 0$ при $K \geq M_j$. С другой стороны, $y(t) = 0$ на $(t_j, t_{j+1}]$. Поэтому $\tilde{y}(t) = y(t) = 0$ при всех $t \in [t_j + \delta, t_{j+1}]$.

Если $x(t_j) = \beta$, то для этого j определим числа b_j и N_j :

$$\begin{aligned} b_j &= \int_{t_j}^{t_j + \delta} (x(s) - \beta) ds; \\ N_j b_j &> \ln 2. \end{aligned} \quad (40)$$

По аналогии с доказательством в ситуации, когда $x(t_j) = \alpha$ будем получать, что при $K \geq N_j$ $\tilde{y}(t) = y(t) = 1$ на $[t_j + \delta, t_{j+1}]$.

Для каждого $j : 1 \leq j \leq m$ одно из чисел M_j, N_j определяется соотношением (39) или (40), другое будем считать 0. После этого, определим $K_0 = \max_{1 \leq j \leq m} \{M_j, N_j\}$. Теперь можно утверждать, что для любого положительного числа ε при всех $K \geq K_0$ будет справедлива следующая оценка

$$\mu = \mu\{t \in [t_0, T] : \tilde{y}(t) \neq y(t)\} \leq m\delta < \varepsilon$$

(см. (36) и (37)). Теорема 2.2 полностью доказана.

2.3 Формулировка теоремы о близости

Рассматриваются две системы:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u, y), \\ x(t) = \varphi(u(t)), \\ y(t) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{u}} = f(t, \tilde{u}, \tilde{y}), \\ \tilde{x}(t) = \varphi(\tilde{u}(t)), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{R}_{t_0}^t(\alpha, \beta, \tilde{x})(y_0), \\ \tilde{u}(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (42)$$

В системе (41) $y(t)$ есть выходная функция локально явного описания, определяемого уравнением (2); в системе (42) $\tilde{y}(t)$ есть выходная функция гладкого описания, определяемого системой (34).

Относительно функций $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \{0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ предполагается, что f непрерывна по первому аргументу и непрерывно дифференцируема по второму, а φ непрерывно дифференцируема. Будем предполагать также, что выполнены следующие условия надежного переключения:

$$\begin{aligned} (\nabla\varphi(u), f(t, u, 1)) &< 0 \quad \text{при } u \in \Gamma_\alpha = \{u : \varphi(u) = \alpha\}; \\ (\nabla\varphi(u), f(t, u, 0)) &> 0 \quad \text{при } u \in \Gamma_\beta = \{u : \varphi(u) = \beta\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Утверждается, что для любого решения $u(t)$ системы (41) существуют такие константы C и K_0 , что при $K \geq K_0$ (K – параметр в (34)) решение $\tilde{u}(t)$ системы (42) удовлетворяет неравенству:

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| \leq \frac{C}{\sqrt{K}} \quad (t_0 \leq t \leq T). \quad (44)$$

2.4 Оценки констант

Решение $u(t)$ системы (41) непрерывно на $[t_0, T]$ и, следовательно, ограничено: $\|u(t)\| < \chi_0$. Поэтому существуют такие положительные

константы f_0, f_1 и M , что при $t \in [t_0, T]$, $\|u\| < 2\chi_0$ и при $y \in \{0; 1\}$ будут выполнены следующие оценки:

$$\|f(t, u, y)\| \leq f_0, \quad (45)$$

$$\left\| \frac{\partial f(t, u, y)}{\partial u} \right\| \leq f_1, \quad (46)$$

$$\|\nabla\varphi(u)\| \leq M. \quad (47)$$

Заметим, что существуют такие $\delta_0 > 0$ и $a > 0$, что при $t \in [t_0, T]$, $\|u\| \leq 2\chi_0$:

$$\begin{aligned} \text{если } |\varphi(u) - \alpha| < \delta_0, \text{ то } (\nabla\varphi(u), f(t, u, 1)) &\leq -a; \\ \text{если } |\varphi(u) - \beta| < \delta_0, \text{ то } (\nabla\varphi(u), f(t, u, 0)) &\geq a. \end{aligned} \quad (48)$$

Действительно, предположим противное (пусть первое из (48) не выполнено), тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие $u_n : \|u_n\| \leq 2\chi_0$ и $t_n \in [t_0, T]$, что

$$|\varphi(u_n) - \alpha| < 1/n \text{ и } (\nabla\varphi(u_n), f(t_n, u_n, 1)) > -1/n.$$

Из последовательностей $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательности, сходящие к \bar{u} и \bar{t} , соответственно. Отсюда следует, что $\varphi(\bar{u}) = \alpha$ и $(\nabla\varphi(\bar{u}), f(\bar{t}, \bar{u}, 1)) \geq 0$, тем самым получается противоречие с (43).

Положим

$$\bar{\Gamma}_\eta = \{u \in \mathbb{R}^n : \varphi(u) = \eta \text{ и } \|u\| \leq 2\chi_0\}.$$

Из (48) и равномерной непрерывности φ непосредственно следует существование такого $\varepsilon_1 \in (0, \chi_0)$, что при $t \in [t_0, T]$

$$\begin{aligned} \text{если } \rho(u, \bar{\Gamma}_\alpha) < \varepsilon_1, \text{ то } (\nabla\varphi(u), f(t, u, 1)) &\leq -a; \\ \text{если } \rho(u, \bar{\Gamma}_\beta) < \varepsilon_1, \text{ то } (\nabla\varphi(u), f(t, u, 0)) &\geq a. \end{aligned} \quad (49)$$

Утверждается, что константы C и K_0 в теореме о близости можно задать следующими равенствами:

$$C = 2f_0C_0e^{f_1(T-t_0)} \frac{C_1}{C_1^2 - 1} [C_1^{2\frac{Mf_0(T-t_0)}{\beta-\alpha} + 4} - 1]; \quad (50)$$

$$K_0 = \frac{C^2}{\varepsilon_2^2 C_1^2}, \quad (51)$$

где

$$C_0 = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{a}}, \quad C_1 = 1 + \frac{2f_0 M}{a}, \quad (52)$$

а ε_2 определяется в п. 2.5.4.

Эти оценки констант будут получены в ходе доказательства теоремы (в параграфе 2.5).

2.5 Доказательство теоремы о близости

2.5.1 Лемма о зависимости решений от начальных данных и параметра

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ – решения системы $\dot{u} = f(t, u, y_1)$, $\bar{u}(t)$ – решение системы $\dot{u} = f(t, u, \bar{y}_1)$, где y_1, \bar{y}_1 – константы 0 или 1. Пусть эти решения определены на $[t_0, t_1] \subset [t_0, T]$, удовлетворяют начальным условиям: $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$, $\bar{u}(t_0) = \bar{u}_0$ и принимают значения в шаре радиуса $2\chi_0$.

Тогда при всех $t \in [t_0, t_1]$ справедливы следующие неравенства:

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{f_1(t_1 - t_0)} \|u_0 - v_0\|, \quad (53)$$

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\| \leq 2f_0(t_1 - t_0) + \|u_0 - \bar{u}_0\|. \quad (54)$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u - v)^2 = (\dot{u} - \dot{v}, u - v) = (f(t, u, y_1) - f(t, v, y_1), u - v),$$

то в силу оценки (46) получим, что при $t \in [t_0, t_1]$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u - v)^2 \leq f_1 (u - v)^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$(u - v)^2 \leq e^{2f_1(t-t_0)} (u(t_0) - v(t_0))^2 = e^{2f_1(t-t_0)} (u_0 - v_0)^2$$

и, следовательно, справедливо неравенство (53).

Далее,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \bar{u}(t)\| &\leq \|u(t) - u_0 - (\bar{u}(t) - \bar{u}_0)\| + \|u_0 - \bar{u}_0\| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, u, y_1) - f(s, \bar{u}, \bar{y}_1)\| ds + \|u_0 - \bar{u}_0\|. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и оценки (45) непосредственно следует справедливость неравенства (54).

2.5.2 Утверждение об оценке времени срабатывания гладкого реле

Если $\tilde{y}(t_*) = 0$, $\tilde{u}(t_*) = \tilde{u}_*$ и $\varphi(\tilde{u}_*) = \beta$, то $w(t_*) \leq 1/2$ и нетрудно видеть, что $\tilde{y}(t) = 0$ при $t \in [t_*, t_* + \lambda]$, где $\lambda \geq 0$. Если $\tilde{y}(t_*) = 1$, $\tilde{u}(t_*) = \tilde{u}_*$ и $\varphi(\tilde{u}_*) = \alpha$, то состояние реле в гладком описании продолжает оставаться равным единице на некотором отрезке $[t_*, t_* + \lambda]$, так как $w(t_*) > 1/2$ и, следовательно, $w(t_* + dt) > 1/2$ при достаточно малых $dt > 0$.

Утверждение об оценке времени срабатывания гладкого реле можно формулировать следующим образом: *существует такое $K_1 > 0$, что при $K > K_1$ будет верна оценка*

$$\lambda \leq \frac{C_0}{\sqrt{K}} \quad (55)$$

(см. (52)).

Доказательство. Будем доказывать утверждение в случае, когда $\tilde{y}(t_*) = 0$, $\tilde{u}(t_*) = \tilde{u}_*$ и $\varphi(\tilde{u}_*) = \beta$ (для случая, когда $\tilde{y}(t_*) = 1$, $\tilde{u}(t_*) = \tilde{u}_*$ и $\varphi(\tilde{u}_*) = \alpha$ доказательство аналогично). В этом случае $\tilde{y}(t) = 0$ при $t \in [t_*, t_* + \lambda]$ и при этих значениях t справедливо неравенство $w(t) \leq 1/2$. Из оценки (45) вытекает, что

$$\|\tilde{u}(t) - \tilde{u}_*\| \leq f_0 \lambda \quad \text{на } [t_*, t_* + \lambda].$$

Если $\lambda < \frac{\varepsilon_1}{f_0}$, то в силу (49) получим, что при $t \in [t_*, t_* + \lambda]$ и $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{d\varphi(\tilde{u})}{dt} = (\nabla\varphi(\tilde{u}), f(t, \tilde{u}, 0)) \geq a,$$

следовательно,

$$\tilde{x}(t) \geq a(t - t_*) + \beta \geq \beta. \quad (56)$$

Отсюда следует, что на $[t_*, t_* + \lambda]$ первое уравнение в (34) записывается в виде:

$$\dot{w} = K(\tilde{x}(t) - \beta)(1 - w(t)).$$

Решив данное уравнение, получим, что

$$1 - w(t) = (1 - w(t_*))e^{-K \int_{t_*}^t (\tilde{x}(s) - \beta) ds}$$

и, тогда из (35), (56) следует, что

$$w(t) \geq 1 - e^{-K \frac{a}{2}(t-t_*)^2}. \quad (57)$$

С другой стороны, $w(t) \leq \frac{1}{2}$ на $[t_*, t_* + \lambda]$, то из неравенства (57) вытекает, что $1 - e^{-K \frac{a}{2} \lambda^2} \leq \frac{1}{2}$. Отсюда непосредственно следует справедливость оценки (55).

Наконец, проверим условие: $\lambda < \frac{\varepsilon_1}{f_0}$. Нетрудно видеть, что если возьмем

$$K_1 = \frac{2f_0^2 \ln 2}{\varepsilon_1^2 a} = \frac{f_0^2 C_0^2}{\varepsilon_1^2}, \quad (58)$$

то при $K > K_1$ будет выполнено неравенство $\lambda < \frac{\varepsilon_1}{f_0}$.

2.5.3 Утверждение о близости поверхностей уровня

Утверждается, что

$$\rho(\bar{\Gamma}_\alpha, \bar{\Gamma}_{\alpha+\delta}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad \rho(\bar{\Gamma}_\beta, \bar{\Gamma}_{\beta-\delta}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Доказательство. Будем доказывать первое соотношение; второе доказывается аналогично. Предположим противное, тогда для некоторого числа $\varepsilon_0 > 0$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $u_n \in \bar{\Gamma}_{\alpha+1/n}$, что $\rho(u_n, \bar{\Gamma}_\alpha) \geq \varepsilon_0$. Построенная последовательность $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ лежит в компактном множестве, поэтому из нее можно выделить подпоследовательность $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к некоторому элементу \bar{u} . В силу построения последовательности $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ получим, что $\bar{u} \notin \bar{\Gamma}_\alpha$. Но из $\varphi(u_{n_k}) = \alpha + 1/n_k$ и непрерывности φ следует, что $\varphi(\bar{u}) = \alpha$.

Из этого утверждения непосредственно следует, что для числа ε_1 , определяемого в параграфе 2.4, существует такое $\delta_1 > 0$, что при

всех $0 < \delta < \delta_1$, будут выполнены неравенства $\rho(\bar{\Gamma}_\alpha, \bar{\Gamma}_{\alpha+\delta}) < \varepsilon_1$ и $\rho(\bar{\Gamma}_\beta, \bar{\Gamma}_{\beta-\delta}) < \varepsilon_1$.

2.5.4 Утверждение об оценке промежутка между выходами на пороговые значения

Воспользовавшись равномерной непрерывностью функции φ на компакте $\bar{\Gamma}_\alpha$, найдем такое $\varepsilon_2 \in (0, \min\{\varepsilon_1, \frac{\chi_0}{C_1}\})$ (см. (52)), что $\varphi(u) \leq \alpha + \delta_1$ при $\rho(u, \bar{\Gamma}_\alpha) \leq \varepsilon_2$. Здесь δ_1 – определенное в предыдущем пункте число, гарантирующее выполнение неравенств $\rho(\bar{\Gamma}_\alpha, \bar{\Gamma}_{\alpha+\delta}) < \varepsilon_1$ и $\rho(\bar{\Gamma}_\beta, \bar{\Gamma}_{\beta-\delta}) < \varepsilon_1$ при $0 < \delta < \delta_1$.

Теперь утверждение об оценке промежутка между выходами на пороговые значения формулируется следующим образом. Пусть выполнены следующие условия:

$$\tilde{x}(t_1) = \alpha, \quad (59)$$

$$y(t_1) = \tilde{y}(t_1) = 1, \quad (60)$$

$$x(t) > \alpha \text{ при } t \in [t_1, \bar{t}_1), \quad (61)$$

$$\|u(t_1) - \tilde{u}(t_1)\| \leq \varepsilon_2. \quad (62)$$

Тогда

$$\bar{t}_1 - t_1 \leq \frac{M}{a} \|u(t_1) - \tilde{u}(t_1)\|. \quad (63)$$

Доказательство. Сначала докажем, что при $t_1 \leq t \leq \bar{t}_1$ будет верна оценка

$$\rho(u(t), \bar{\Gamma}_\alpha) < \varepsilon_1. \quad (64)$$

Предположим противное, тогда существует такой момент $t_2 \in [t_1, \bar{t}_1)$, что

$$\rho(u(t_2), \bar{\Gamma}_\alpha) = \varepsilon_1 \quad (65)$$

и

$$\rho(u(t), \bar{\Gamma}_\alpha) < \varepsilon_1 \text{ при всех } t_1 \leq t < t_2. \quad (66)$$

Из (65) вытекает, что $\varphi(u(t_2)) \geq \alpha + \delta_1$. В силу (66), (60) и оценки скорости изменения φ вблизи поверхностей переключения (см. (49))

получим, что функция φ строго убывает на $[t_1, t_2)$. Далее, из (62) и определения числа ε_2 следует, что $\varphi(u(t_2)) < \varphi(u(t_1)) \leq \alpha + \delta_1$, тем самым, получено противоречие.

В силу справедливости (64) на $[t_1, \bar{t}_1]$ получим, что при этих значениях t будет выполнено первое из неравенств в (49). Отсюда и из условий (59), (61) следует, что на $[t_1, \bar{t}_1]$

$$\tilde{x}(t_1) = \alpha \leq x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^t \frac{dx(s)}{ds} \leq x(t_1) - a(t - t_1),$$

следовательно,

$$\bar{t}_1 - t_1 \leq \frac{\varphi(u(t_1)) - \varphi(\tilde{u}(t_1))}{a}.$$

Далее, в силу использования (47) получим неравенство (63).

Аналогично, можно доказать второе утверждение об оценке промежутка между выходами на пороговые значения, которое формулируется следующим образом. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\tilde{x}(t_1) = \beta,$$

$$y(t_1) = \tilde{y}(t_1) = 0,$$

$$x(t) < \beta \text{ при } t \in [t_1, \bar{t}_1),$$

$$\|u(t_1) - \tilde{u}(t_1)\| \leq \varepsilon_2.$$

Тогда

$$\bar{t}_1 - t_1 \leq \frac{M}{a} \|u(t_1) - \tilde{u}(t_1)\|.$$

Легко заметить, что эти утверждения остаются верными, когда в них меняем местами x и \tilde{x} .

2.5.5 Утверждение об оценке близости

Нетрудно заметить, что если на $[t_0, T]$ реле в виде локально явного уравнения (2) не переключается, то теорема о близости является тривиальной ($C = 0, K_0 > 0$). В общем случае докажем, что количество переключений на $[t_0, T]$ будет конечным. Пусть $\tau, \bar{\tau} \in [t_0, T]$ – любые два

соседние моменты переключения реле в виде локально явного уравнения (2), тогда $\beta - \alpha = |\varphi(u(\tau)) - \varphi(u(\bar{\tau}))|$. Отсюда и из (47), (45) следует, что

$$|\tau - \bar{\tau}| \geq \frac{\beta - \alpha}{Mf_0}. \quad (67)$$

Пусть на $[t_0, T]$ локально явное реле имеет m переключений, тогда

$$T - t_0 \geq t_m - t_{m-1} + t_{m-1} - t_{m-2} + \dots + t_2 - t_1.$$

Поскольку оценка (67) означает, что промежуток времени между любыми соседними переключениями не меньше, чем $\frac{\beta - \alpha}{Mf_0}$, то из последнего неравенства вытекает, что

$$T - t_0 \geq (m - 1) \frac{\beta - \alpha}{Mf_0}$$

и, следовательно,

$$m \leq \frac{Mf_0(T - t_0)}{\beta - \alpha} + 1. \quad (68)$$

Для каждого целого $0 < j \leq m$ введем следующие обозначения:

t_j – j -я точка переключения локально явного описания реле;

s_j – j -я точка переключения гладкого описания реле;

\tilde{s}_j – j -я ближайшая к s_j слева точка, для которой $\tilde{u}(\tilde{s}_j) = u(t_j)$.

Кроме этого, считаем, что $t_{m+1} = T$ и $t_j = s_j = t_0$ при $j = 0$.

Положим

$$\Delta_j = 2f_0C_0e^{f_1(t_j - t_0)} \frac{C_1}{C_1^2 - 1} (C_1^{2j} - 1) \quad (j \geq 0) \quad (69)$$

и

$$\bar{K}_0 = 0, \quad \bar{K}_{j+1} = \left[\frac{(C_1\Delta_j + 2f_0C_0)e^{f_1(t_{j+1} - t_j)}}{\varepsilon_2} \right]^2 \quad (j \geq 0), \quad (70)$$

(см. (52)).

Заметим, что для любого $j \in [0, m]$ верны следующие неравенства:

$$\Delta_{j+1} > \Delta_j, \quad \bar{K}_{j+1} > \bar{K}_j$$

и

$$\bar{K}_{j+1} > \max\left\{K_1, \frac{\Delta_j^2}{\varepsilon_2^2}\right\} \quad (\text{см. (58)}).$$

Теперь утверждение об оценке близости формулируется следующим образом: для любого $0 \leq j \leq m + 1$ и при положительном параметре $K \geq \bar{K}_j$, $t \in [t_0, t_j]$, будет верно неравенство

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| \leq \frac{\Delta_j}{\sqrt{K}}. \quad (71)$$

Доказательство. Будем доказывать это утверждение индукцией по j . При $j = 0$ утверждение, очевидно, выполнено, так как $\tilde{u}(t_0) = u(t_0) = u_0$. Пусть оно справедливо для некоторого j , докажем его справедливость для $j + 1$. Согласно предположению индукции, на $[t_0, t_j]$ будет верно неравенство (71). Если $t_j < s_j$, то в силу утверждения об оценке времени срабатывания гладкого реле и одного из утверждений об оценке промежутка между выходами на пороговые значения получим, что при $K \geq \bar{K}_{j+1}$

$$s_j - t_j \leq s_j - \tilde{s}_j + |\tilde{s}_j - t_j| \leq \frac{C_0}{\sqrt{K}} + \frac{M}{a} \frac{\Delta_j}{\sqrt{K}}. \quad (72)$$

Тогда согласно оценке (54) в лемме 2.5.1 получим, что на $[t_j, s_j]$

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq 2f_0(s_j - t_j) + \|u(t_j) - \tilde{u}(t_j)\|.$$

Из последнего неравенства, (72) и предположения индукции следует, что при $K \geq \bar{K}_{j+1}$, $t \in [t_j, s_j]$

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq 2f_0\left(\frac{C_0}{\sqrt{K}} + \frac{M}{a} \frac{\Delta_j}{\sqrt{K}}\right) + \frac{\Delta_j}{\sqrt{K}},$$

следовательно,

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq [C_1\Delta_j + 2f_0C_0] \frac{1}{\sqrt{K}}. \quad (73)$$

Если $t_{j+1} \leq s_{j+1}$, то в силу оценки (53) получим, что при $t \in [t_j, t_{j+1}]$

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \|u(t_j) - \tilde{u}(t_j)\| e^{f_1(t_{j+1}-t_j)}.$$

Отсюда и из оценки (73) вытекает, что при $K \geq \bar{K}_{j+1}$ и $t \in [t_0, t_{j+1}]$

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq [C_1\Delta_j + 2f_0C_0] \frac{1}{\sqrt{K}} e^{f_1(t_{j+1}-t_j)}. \quad (74)$$

Нетрудно проверить, что неравенство (74) еще остается верным, когда $t_j \geq s_j$.

Если $t_{j+1} > s_{j+1}$, то неравенство (74) верно при $K \geq \bar{K}_{j+1}$ и $t \in [t_0, s_{j+1}]$. Легко видеть, что при $K \geq \bar{K}_{j+1}$ все условия одного из утверждений об оценке промежутка между выходами на пороговые значения будут выполнены на $[\tilde{s}_{j+1}, t_{j+1}]$. Тогда

$$t_{j+1} - s_{j+1} \leq t_{j+1} - \tilde{s}_{j+1} \leq \frac{M}{a} \|u(\tilde{s}_{j+1}) - \tilde{u}(\tilde{s}_{j+1})\|. \quad (75)$$

Далее, из (54) следует, что при $[s_{j+1}, t_{j+1}]$

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq 2f_0(t_{j+1} - s_{j+1}) + \|u(s_{j+1}) - \tilde{u}(s_{j+1})\|. \quad (76)$$

Поскольку оценка (74) верна при $t = \tilde{s}_{j+1}$ и $t = s_{j+1}$, то из (75), (76) и справедливости (74) на $[t_0, s_{j+1}]$ вытекает, что при $K \geq \bar{K}_{j+1}$ и $t \in [t_0, t_{j+1}]$

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq C_1[C_1\Delta_j + 2f_0C_0] \frac{1}{\sqrt{K}} e^{f_1(t_{j+1}-t_j)}. \quad (77)$$

Таким образом, во всех случаях верна оценка (77). Отсюда нетрудно получить, что при $K \geq \bar{K}_{j+1}$ и $t \in [t_0, t_{j+1}]$

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \frac{\Delta_{j+1}}{\sqrt{K}},$$

т.е. доказано утверждение о близости.

Теорема о близости будет доказано, если нам удачно доказать, что

$$C \geq \Delta_{m+1} \quad (78)$$

и

$$K_0 \geq \bar{K}_{m+1}, \quad (79)$$

(см. (50) и (51)).

Неравенство (78) непосредственно следует из (68) и (69). Теперь докажем (79). В силу (70) получим, что

$$\bar{K}_{m+1} = \left[\frac{(C_1\Delta_m + 2f_0C_0)e^{f_1(t_{m+1}-t_m)}}{\varepsilon_2} \right]^2.$$

Отсюда и из (69) вытекает, что

$$\begin{aligned}\bar{K}_{m+1} &\leq \left[\frac{2f_0 C_0 (e^{f_1(t_m-t_0)} \frac{C_1^2}{C_1^2-1} (C^{2m} - 1) + 1) e^{f_1(t_{m+1}-t_m)}}{\varepsilon_2} \right]^2 \leq \\ &\leq \left[\frac{2f_0 C_0 e^{f_1(t_{m+1}-t_0)} \frac{C^{2(m+1)}-1}{C_1^2-1}}{\varepsilon_2} \right]^2 \leq \frac{\Delta_{m+1}^2}{C_1^2 \varepsilon_2^2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{K}_{m+1} \leq \frac{C^2}{C_1^2 \varepsilon_2^2}$$

и, тем самым, доказано неравенство (79).

Заметим, что эта теорема была доказана в предположении, что $\|\tilde{u}(t)\| \leq 2\chi_0$ при $t \in [t_0, T]$. Положим

$$T_1 = \sup\{t \geq t_0 : \|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \chi_0\}.$$

Очевидно, $T_1 > t_0$. Докажем, что $T_1 = T$. Предположим противное, тогда на $[t_0, T_1]$ будет верна теорема о близости, в формулировке которой C и K_0 определяются теми же равенствами (50) и (51) (так как $T_1 < T$). Из определения ε_2 в пункте 2.5.4 вытекает, что $K_0 > \frac{C^2}{\chi_0^2}$, поэтому при $K \geq K_0$ будет верно неравенство $\frac{C}{\sqrt{K}} < \chi_0$. Отсюда непосредственно следует противоречие, так как $\|u(T_1) - \tilde{u}(T_1)\| = \chi_0$. Теорема о близости полностью доказана.

2.6 Частный случай

Отметим частный случай, в котором указанную оценку для C можно улучшить, а параметр $K > 0$ в (34) можно выбирать произвольно. В этом случае предполагается, что рассматриваемые системы (41), (42) являются скалярными $n = 1$, $\varphi(u) = u$ и функция f положительна при выключенном реле ($y = 0$) и отрицательна при включенном ($y = 1$). Из последнего условия вытекает существование такой константы $b > 0$, что при $t \in [t_0, T]$ и $|u| \leq 2\chi_0$ выполняются неравенства:

$$b \leq f(t, u, 0), \quad f(t, u, 1) \leq -b. \quad (80)$$

Наконец, предполагается, что функция f возрастает по модулю при возрастании t , точнее, существует такая константа $k \geq 0$, что при $t, \bar{t} \in [t_0, T]$ и $|u| \leq 2\chi_0$

$$[f(t, u, 0) - f(\bar{t}, u, 0)](t - \bar{t}) \geq k(t - \bar{t})^2, \quad (81)$$

$$[f(t, u, 1) - f(\bar{t}, u, 1)](t - \bar{t}) \leq -k(t - \bar{t})^2. \quad (82)$$

Условия (81), (82) в случае гладкой по t функции f означают, что

$$\frac{\partial f(t, u, 0)}{\partial t} \geq k, \quad \frac{\partial f(t, u, 1)}{\partial t} \leq -k.$$

при $t \in [t_0, T]$ и $|u| \leq 2\chi_0$.

2.6.1 Оценка констант C в частном случае

Пусть выполнены условия (80) – (82). Тогда для рассматриваемого частного случая в качестве константы C в теореме о близости, которая была сформулирована в параграфе 2.3 можно взять следующие величины:

$$\begin{aligned} C &= 2f_0(f_0 \frac{T-t_0}{\beta-\alpha} + 1)(\frac{f_0}{b} + 1)\sqrt{\frac{2\ln 2}{b}}, \quad \text{если } k = 0; \\ C &= \frac{2f_0}{1-e^{-\frac{k}{f_0}(\beta-\alpha)}}(\frac{f_0}{b} + 1)\sqrt{\frac{2\ln 2}{b}}, \quad \text{если } k > 0. \end{aligned} \quad (83)$$

2.6.2 Доказательство

Пусть \bar{s}_j ($0 < j \leq m$) – ближайшая к s_j справа точка, для которой $\tilde{u}(\bar{s}_j) = u(t_j)$. Будем оценивать величины $s_j - \bar{s}_j$ и $\bar{s}_j - s_j$. Если $\tilde{u}(\bar{s}_j) = \beta$, то из условия (80) следует, что при $t \in$

$$\tilde{u}(t) - \beta = \int_{\bar{s}_j}^t f(s, \tilde{u}(s), 0) ds \geq b(t - \bar{s}_j). \quad (84)$$

Отсюда вытекает, что на $[\bar{s}_j, s_j)$ первое уравнение в (34) записывается в следующем виде

$$\dot{w} = K(\tilde{u}(t) - \beta)(1 - w(t)).$$

Решив это уравнение, получим:

$$1 - w(t) = (1 - w(\bar{s}_j))e^{-K \int_{\bar{s}_j}^t (\tilde{u}(s) - \beta) ds}.$$

Из последнего равенства, (35) и (84) следует, что

$$1 - w(t) \leq e^{-K \int_{\tilde{s}_j}^t b(s - \tilde{s}_j) ds} = e^{-\frac{Kb}{2}(t - \tilde{s}_j)^2}.$$

С другой стороны, $0 \leq w(t) \leq \frac{1}{2}$ при $t \in [\tilde{s}_j, s_j]$. Тогда

$$\frac{1}{2} \leq e^{-\frac{Kb}{2}(s_j - \tilde{s}_j)^2}$$

и, следовательно,

$$s_j - \tilde{s}_j \leq \tilde{\lambda}, \quad \text{где} \quad \tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{b}} \frac{1}{\sqrt{K}}. \quad (85)$$

Далее, оценим величину $\bar{s}_j - s_j$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\bar{s}_j) &= \tilde{u}(s_j) + \int_{s_j}^{\bar{s}_j} f(s, \tilde{u}(s), 1) ds = \\ &= \tilde{u}(\tilde{s}_j) + \int_{\tilde{s}_j}^{s_j} f(s, \tilde{u}(s), 0) ds + \int_{s_j}^{\bar{s}_j} f(s, \tilde{u}(s), 1) ds, \end{aligned}$$

следовательно,

$$- \int_{s_j}^{\bar{s}_j} f(s, \tilde{u}(s), 1) ds = \int_{\tilde{s}_j}^{s_j} f(s, \tilde{u}(s), 0) ds.$$

Тогда из условия (80) и ограниченности f вытекает, что

$$b(\bar{s}_j - s_j) \leq f_0 \sqrt{\frac{2 \ln 2}{b}} \frac{1}{\sqrt{K}}$$

и, тем самым,

$$\bar{s}_j - s_j \leq \bar{\lambda}, \quad \text{где} \quad \bar{\lambda} = \frac{f_0}{b} \sqrt{\frac{2 \ln 2}{b}} \frac{1}{\sqrt{K}}. \quad (86)$$

Аналогично, оценки (85) и (86) также получаются в случае, когда $\tilde{u}(\tilde{s}_j) = \alpha$.

Заметим, что функции $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$ на участках возрастания $[t_j, t_{j+1}]$ и $[\bar{s}_j, \tilde{s}_{j+1}]$ удовлетворяют уравнению $\dot{u} = f(t, u, 0)$. Следовательно, обратные к ним функции являются решениями уравнения

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{f(t, u, 0)}$$

и принимают в точке α значения t_j и \bar{s}_j , соответственно. Будем использовать общее обозначение $g_\alpha^\xi s$ для значения в точке ξ решения последнего уравнения, удовлетворяющего начальному условию $t(\alpha) = s$. Таким образом, $g_\alpha^\xi t_j$, $g_\alpha^\xi \bar{s}_j$ ($\alpha \leq \beta$) – обратные функции к $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$ на рассматриваемых участках.

Аналогично, через $\bar{g}_\alpha^\xi s$ обозначим значение в точке ξ того решения уравнения

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{f(t, u, 1)},$$

которое в точке α принимает значение s . Если на промежутках $[t_j, t_{j+1}]$ и $[\bar{s}_j, \tilde{s}_{j+1}]$ функции $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$ убывают, то $\bar{g}_\alpha^\xi t_{j+1}$, $\bar{g}_\alpha^\xi \tilde{s}_{j+1}$ – обратные к ним на рассматриваемых промежутках.

Пусть $[t_j, t_{j+1}]$ и $[\bar{s}_j, \tilde{s}_{j+1}]$ – промежутки возрастания. Тогда $s - t = g_\alpha^\xi \bar{s}_j - g_\alpha^\xi t_j$ для $s = g_\alpha^\xi \bar{s}_j$ и $t = g_\alpha^\xi t_j$. Далее, из (81) и ограниченности функции f вытекает, что

$$\begin{aligned} (\dot{s} - \dot{t})(s - t) &= \left[\frac{1}{f(s, \xi, 0)} - \frac{1}{f(t, \xi, 0)} \right] (s - t) = \\ &= \frac{-[f(s, \xi, 0) - f(t, \xi, 0)](s - t)}{f(t, \xi, 0)f(s, \xi, 0)} \leq -\frac{k}{f_0^2}(s - t)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|s - t| \leq e^{-\frac{k}{f_0^2}(\xi - \alpha)} |\bar{s}_j - t_j| \quad (87)$$

и, в частности,

$$|\tilde{s}_{j+1} - t_{j+1}| \leq e^{-\frac{k}{f_0^2}(\beta - \alpha)} |\bar{s}_j - t_j| = e^{-\Delta} |\bar{s}_j - t_j|, \quad (88)$$

где $\Delta = \frac{k}{f_0^2}(\beta - \alpha)$.

Если $[t_j, t_{j+1}]$ и $[\bar{s}_j, \tilde{s}_{j+1}]$ – промежутки убывания, то

$$\bar{s}_j - t_j = \bar{g}_\alpha^\beta \tilde{s}_{j+1} - \bar{g}_\alpha^\beta t_{j+1}.$$

В силу (82) и ограниченности f получим, что для $s = \bar{g}_\alpha^\xi \tilde{s}_{j+1}$, $t = \bar{g}_\alpha^\xi t_{j+1}$

$$(\dot{s} - \dot{t})(s - t) = \left[\frac{1}{f(s, \xi, 1)} - \frac{1}{f(t, \xi, 1)} \right] (s - t) =$$

$$= \frac{-[f(s, \xi, 1) - f(t, \xi, 1)](s - t)}{f(t, \xi, 1)f(s, \xi, 1)} \geq \frac{k}{f_0^2}(s - t)^2.$$

Следовательно,

$$|\bar{s}_j - t_j| \geq e^{\frac{k}{f_0^2}(\beta - \alpha)} |\tilde{s}_{j+1} - t_{j+1}|,$$

и, тем самым, получена оценка (88).

Положив $\Lambda = \tilde{\lambda} + \bar{\lambda}$, получим:

$$\begin{aligned} \bar{s}_j - t_j &= \bar{s}_j - s_j + s_j - \tilde{s}_j + \tilde{s}_j - t_j \leq \Lambda + e^{-\Delta}(\bar{s}_{j-1} - t_{j-1}) = \\ &= \Lambda + e^{-\Delta}(\Lambda + \tilde{s}_{j-1} - t_{j-1}) \leq \dots \leq \\ &\leq \Lambda + e^{-\Delta}(\Lambda + e^{-\Delta}(\Lambda + e^{-\Delta}(\Lambda + \dots + e^{-\Delta}(\bar{s}_1 - t_1)))) = \\ &= \Lambda(1 + e^{-\Delta} + e^{-2\Delta} + \dots + e^{-(j-1)\Delta}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \bar{s}_j - t_j &\leq j\Lambda, \quad \text{если } k = 0; \\ \bar{s}_j - t_j &\leq \frac{\Lambda}{1 - e^{-\Delta}}, \quad \text{если } k > 0. \end{aligned} \tag{89}$$

Оценим $\|\tilde{u}(t) - u(t)\|$ на $[t_j, t_{j+1}]$. При $t \in [t_j, s_j]$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(t) - u(t)\| &\leq \|\tilde{u}(t) - \tilde{u}(\tilde{s}_j)\| + \\ &+ \|\tilde{u}(\tilde{s}_j) - u(t_j)\| + \|u(t_j) - u(t)\| \leq 2f_0(\bar{s}_j - t_j). \end{aligned} \tag{90}$$

При $t \in [s_j, \bar{s}_j]$ оценка (90) также верна, так как

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| \leq \|\tilde{u}(t) - \tilde{u}(\bar{s}_j)\| + \|\tilde{u}(\bar{s}_j) - u(t_j)\| + \|u(t_j) - u(t)\|.$$

При каждом $t \in [\bar{s}_j, t_{j+1}]$ существует такой единственный момент $s \in [t_j, t_{j+1}]$, что $u(s) = \xi$, где $\xi = \tilde{u}(t)$. Если $[t_j, t_{j+1}]$ – промежуток убывания, то

$$\bar{s}_j - t_j = \bar{g}_\xi^\beta s - \bar{g}_t^\beta \geq e^{\frac{k}{f_0^2}(\beta - \xi)}(s - t)$$

и, следовательно, $s - t \leq \bar{s}_j - t_j$. В случае, когда $[t_j, t_{j+1}]$ – промежуток возрастания, оценка $s - t \leq \bar{s}_j - t_j$ непосредственно следует из (87). Тогда при $t \in [\bar{s}_j, t_{j+1}]$

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| = \|u(s) - u(t)\| \leq f_0|s - t| \leq |\bar{s}_j - t_j|. \tag{91}$$

Из (90) и (91) следует, что $\|\tilde{u}(t) - u(t)\| \leq 2f_0|\bar{s}_j - t_j|$ при $t \in [t_j, t_{j+1}]$.
 Далее, используя (89), получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(t) - u(t)\| &\leq 2jf_0\Lambda, \quad \text{если } k = 0; \\ \|\tilde{u}(t) - u(t)\| &\leq \frac{2f_0\Lambda}{1-e^{-\Delta}}, \quad \text{если } k > 0. \end{aligned} \tag{92}$$

На $[t_0, T]$ локально явное реле имеет m переключений, на каждом $[t_j, t_{j+1}]$ ($0 \leq j \leq m$) верно (92), при этом $t_{m+1} = T$. Таким образом, при $t \in [t_0, T]$ верна оценка (92), в которой $j = m$. Отсюда и из (85), (86) вытекает требуемое неравенство (44), в котором C определяется формулами (83).

3 Примеры анализа некоторых систем с релейным управлением

3.1 Система с одним реле на плоскости

3.1.1 Постановка задачи

Пусть задана следующая система

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2y(t) & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 - 2y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ x(t) = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} = \|u(t)\|, \\ y(t) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0), \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (93)$$

Здесь:

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ и $u : [t_0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^2$ – непрерывная функция,

$y(t)$ – выходной сигнал реле в виде локально явного уравнения (2) с пороговыми значениями α, β ($0 < \alpha < \beta$) и входной функцией $x(t)$.

Вопрос заключается в том, при каких условиях на ε система (93) имеет периодическое решение.

3.1.2 Теорема (критерий периодичности решений)

Для того, чтобы начиная с некоторого момента решение системы (93) было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы $\varepsilon \in \tilde{\mathbb{Q}} = \frac{\pi}{\ln \frac{\beta}{\alpha}} \mathbb{Q}$.

Доказательство. Сначала докажем, что существует момент $t_1 \geq t_0$, в которой решение системы (93) пересекается с окружностью радиуса α , т.е. $\|u(t_1)\| = \alpha$. Если $y(t) = 1$, то общим решением первого уравнения в системе (93) является

$$u(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos \varepsilon t & -\sin \varepsilon t \\ \sin \varepsilon t & \cos \varepsilon t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Положим

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon t & -\sin \varepsilon t \\ \sin \varepsilon t & \cos \varepsilon t \end{pmatrix}.$$

При этом $\Phi(t)$ называется *фундаментальной матрицей*. Нетрудно проверить, что эта матрица обладает следующими свойствами:

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \quad \text{и} \quad \Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2) = \Phi(t_1 + t_2). \quad (95)$$

В силу (94) и (95) получим, что решение системы (93) является

$$u(t) = e^{-(t-t_0)} \Phi(t - t_0) u(t_0). \quad (96)$$

Аналогично, если $y = 0$, то решение системы (93) вычисляется по следующей формуле:

$$u(t) = e^{t-t_0} \Phi(t - t_0) u(t_0). \quad (97)$$

Если $\|u_0\| > \beta$, то после этого момента реле включено ($y = 1$) до первого момента, в котором вход $x(t)$ достигает нижнего порогового значения α . Поэтому решение системы (93) вычисляется по формуле (96) и, следовательно, входная функция $x(t) = \|u(t)\| = e^{-(t-t_0)} \|u_0\|$ строго убывает со значения $\|u_0\|$ и может стремиться к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда вытекает, что в некоторый момент t_1 эта входная функция достигает значения α и, тем самым, доказано, что решение системы (93) в данный момент пересекается с окружностью радиуса α . Аналогично, если $\|u_0\| < \alpha$, то решение, вычисляемое по формуле (97), пересекается с окружностью радиуса α в некоторый момент, обозначаемый t_1 и, после этого момента оно выходит за рамки этой окружности. Если $\alpha \leq \|u_0\| \leq \beta$, то в двух случаях ($y = 1$ или $y = 0$) нетрудно проверить, что решение системы (93) лежит между этими окружностями и также существует момент t_1 такой, что $\|u(t_1)\| = \alpha$. Таким образом, доказано, что начиная с некоторого момента, решение системы (93) полностью лежит в кольце, ограниченном между окружностями радиусов α и β ; кроме этого, в некоторый момент t_1 решение пересекается с окружностью радиуса α .

Теперь мы найдем условия для ε , при которых решение будет периодическим. Видно, что после момента t_1 реле выключен ($y = 0$) и решение вычисляется по формуле (97), в которой t_0 заменено на t_1 . Это решение пересекается с большой окружностью в некоторый момент t_2 и

$$u(t_2) = e^{t_2 - t_1} \Phi(t_2 - t_1) u(t_1), \quad (98)$$

следовательно, $t_2 - t_1 = \ln \frac{\beta}{\alpha}$. После момента t_2 реле становится включенным ($y = 1$) и решение вычисляется по формуле (96), в которой t_0 заменено на t_2 . Кроме этого, это решение пересекается с окружностью радиуса α в некоторый момент t_3 и

$$u(t_3) = e^{-(t_3 - t_2)} \Phi(t_3 - t_2) u(t_2), \quad (99)$$

следовательно, $t_3 - t_2 = \ln \frac{\beta}{\alpha}$. Таким образом, доказано, что за время $\ln \frac{\beta}{\alpha}$ решение системы (93) может совершить траекторию из маленькой до большой окружности или наоборот.

Введем следующие обозначения:

t_{2n} ($n \in \mathbb{N}$) – моменты переключения реле с 0 на 1 и, следовательно,

$$x(t_{2n}) = \|u(t_{2n})\| = \beta;$$

t_{2n+1} ($n \in \mathbb{N}$) – моменты переключения реле с 1 на 0 и, следовательно,

$$x(t_{2n+1}) = \|u(t_{2n+1})\| = \alpha.$$

По аналогии с (98), (99) и в силу свойства (95) функции $\Phi(t)$ получим, что

$$t_{2n+1} - t_{2n} = t_{2n} - t_{2n-1} = \dots = t_2 - t_1 = \ln \frac{\beta}{\alpha} \quad (100)$$

и

$$\begin{aligned} u(t_{2n+1}) &= e^{-(t_{2n+1} - t_{2n})} \Phi(t_{2n+1} - t_{2n}) u(t_{2n}) = \\ &= e^{-(t_{2n+1} - t_{2n})} \Phi(t_{2n+1} - t_{2n}) u(t_{2n}) e^{t_{2n} - t_{2n-1}} \Phi(t_{2n} - t_{2n-1}) u(t_{2n-1}). \end{aligned}$$

Согласно (100) последнее равенство можно записать в виде

$$u(t_{2n+1}) = \Phi\left(2 \ln \frac{\beta}{\alpha}\right) u(t_{2n-1}).$$

По этой индукции нетрудно получить, что

$$u(t_{2n+1}) = \Phi\left(2n \ln \frac{\beta}{\alpha}\right)u(t_1). \quad (101)$$

Теперь можно утверждать, что с момента t_1 решение системы (93) является периодическим тогда и только тогда, когда существует $n \in \mathbb{N}$ такой, что $u(t_{2n+1}) = u(t_1)$. Отсюда и из (101) следует, что матрица $\Phi\left(2n \ln \frac{\beta}{\alpha}\right)$ является единичной. Это эквивалентно следующему уравнению:

$$\cos \varepsilon 2n \ln \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Решив последнее уравнение, получим: $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = \frac{k\pi}{n \ln \frac{\beta}{\alpha}}$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Нетрудно проверить, что начиная с некоторого момента решение системы (93) имеет период $T = 2 \ln \frac{\beta}{\alpha}$ если $\varepsilon = 0$ и $T = 2n \ln \frac{\beta}{\alpha}$ если $\varepsilon = \frac{k\pi}{n \ln \frac{\beta}{\alpha}}$. Теорема 3.1.2 полностью доказана.

3.1.3 Эксперименты численного анализа

Для численного анализа системы (93) воспользуемся гладким описанием реле (см. параграф 2.1). При этом, система (93) будет записываться в виде:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}}_1 \\ \dot{\tilde{u}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\tilde{y}(t) & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 - 2\tilde{y}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{x}(t) = \sqrt{\tilde{u}_1^2(t) + \tilde{u}_2^2(t)} = \|\tilde{u}(t)\|, \\ \tilde{y}(t) = \tilde{R}_{t_0}^t(\alpha, \beta, \tilde{x})(y_0), \\ \tilde{u}(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (102)$$

Здесь $y(t)$ – выходной сигнал реле в виде гладкого описания (34).

С помощью программы Mathematica 7.0 приведем результаты численного решения системы (102) при некоторых значениях параметров и начальных условиях: $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $u_0 = (1, 2)$, $y_0 = 0$.

(а). Если возьмем $\varepsilon = \frac{2\pi}{9 \ln 3} \in \tilde{\mathbb{Q}}$, то полученное решение системы (102) при $K = K_1 = 10^7$ практически является периодическим и его период $T = 18 \ln 3$. Изображение этого решения приведено на Рис. 1.

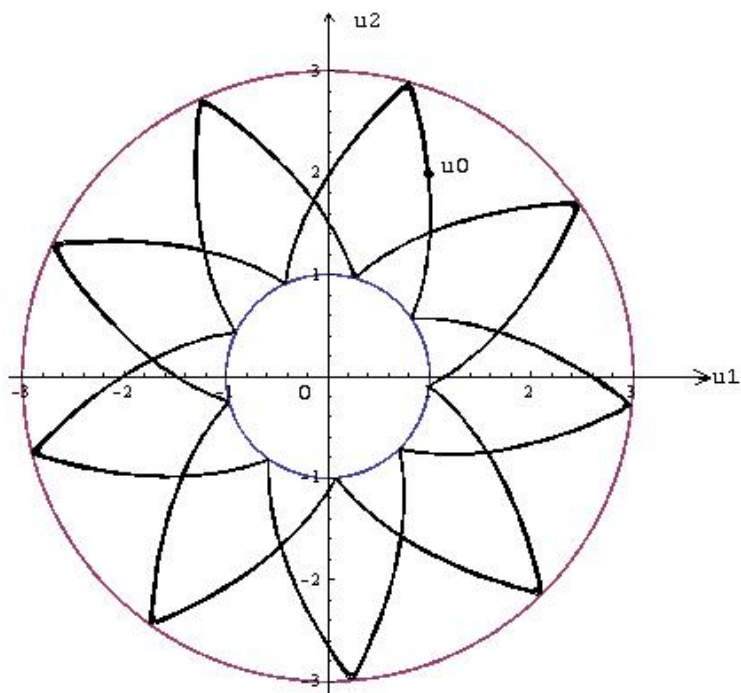


Рис. 1. Периодическое решение системы с одним реле.

Если возьмем другой параметр $K = \frac{K_1}{2}$, то траектории решений системы (102), в которой $K = K_1$ и $K = \frac{K_1}{2}$ практически совпадают. Это означает, что изучаемое гладкое описание реле в параграфе 2.1 дает устойчивый результат, который не зависит от параметра K при K достаточно большом.

Если возьмем значение параметра K маленькое, например, $K = 50$, то полученный результат показывает, что гладкое описание реле (34) не дает устойчивый результат, именно, решение от значения параметра K зависит сильно (и не является периодическим).

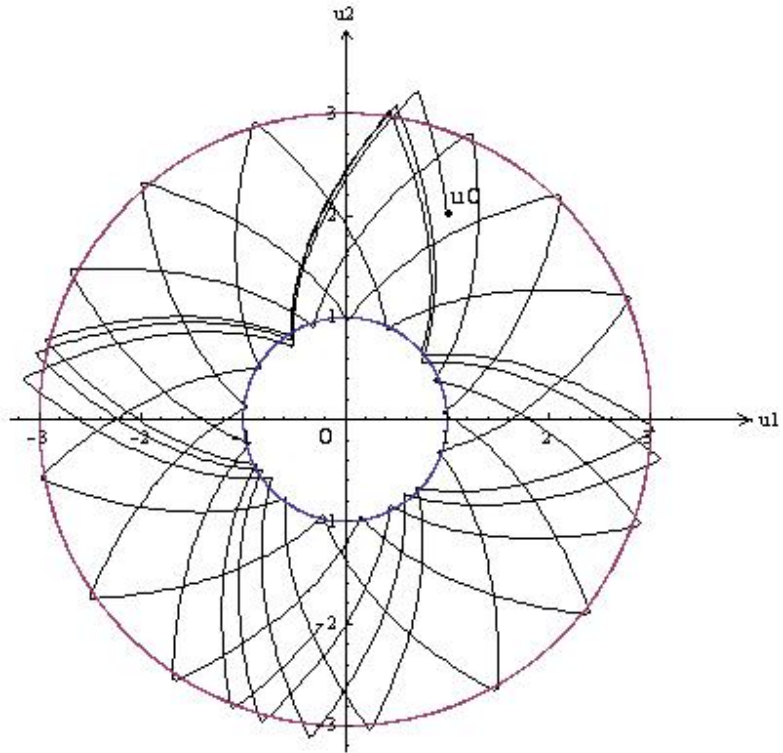


Рис. 2. Решение при $K = 50$.

(б). Если возьмем $\varepsilon = \frac{6}{9 \ln 3} \notin \tilde{\mathcal{Q}}$, то решение системы (102) не является периодическим – его траектория при $t \rightarrow +\infty$ заполняет кольцо, ограниченное между окружностями радиусов α и β (см. Рис. 3).

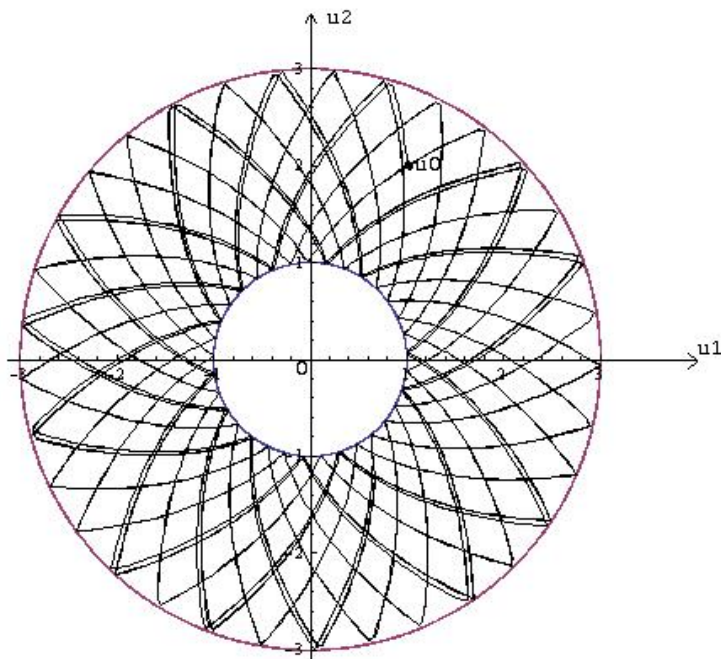


Рис. 3. Непериодическое решение системы с одним реле.

(в). Отметим особый случай, когда $\varepsilon = 0$. Решение системы (102) является периодическим с периодом $T = 2 \ln 3$. Траектория этого решения изображается следующим образом:

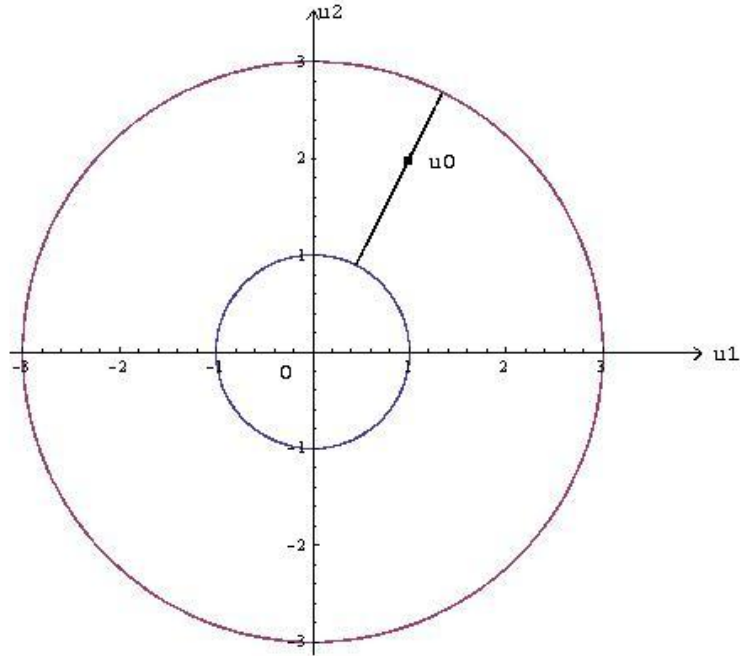


Рис. 4. Периодическое решение в особом случае.

3.1.4 Оценка близости к решениям системы с локально явным описанием реле

По сравнению с системой (41) в системах (93) и (102) функция $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ определяется следующим образом:

$$\varphi(u) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Для такой функции условия надежного переключения (см. (43) в параграфе 2.3) автоматически выполнены. Действительно, при $u \in \Gamma_\alpha = \{u : \varphi(u) = \alpha\}$

$$\begin{aligned} (\nabla\varphi(u), f(t, u, 1)) &= \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -\varepsilon \\ \varepsilon & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u_1 - \varepsilon u_2 \\ \varepsilon u_1 - u_2 \end{pmatrix} \right) = -\sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \end{aligned}$$

т.е.

$$(\nabla\varphi(u), f(t, u, 1)) = -\alpha < 0.$$

Аналогично, можно доказать, что при $u \in \Gamma_\beta = \{u : \varphi(u) = \beta\}$

$$(\nabla\varphi(u), f(t, u, 0)) = \beta > 0.$$

Теперь для данной задачи найдем константы χ_0 , a , f_0 , f_1 и M (см. параграф 2.4). В силу доказательства критерия 3.1.2 можно предполагать, что $\|u_0\| \in [\alpha, \beta]$ и тогда $\|u\| \leq \beta =: \chi_0$ при $t \in [t_0, T]$. Согласно условию надежного переключения в качестве a можно взять константу α . Далее,

$$f(t, u, y) = Au, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 - 2y & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 - 2y \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\|f(t, u, y)\| \leq \|A\| \cdot \|u\| \leq \beta\sqrt{1 + \varepsilon^2} =: f_0$$

и

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} f(t, u, y) \right\| = \|A\| = \sqrt{1 + \varepsilon^2} =: f_1.$$

Наконец

$$\|\nabla\varphi(u)\| = \left\| \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right) \right\| = 1 =: M.$$

Обозначим $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ решения, соответственно, систем (93) и (102), в которых $\|u_0\| \in [\alpha, \beta]$. По теореме о близости (см. параграф 2.3) получим, что при $t \in [t_0, T]$ и $K \geq K_0$

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \frac{C}{\sqrt{K}},$$

где константа C вычисляется по формуле (50), в которой $\chi_0 = \beta$, $a = \alpha$, $f_0 = \beta\sqrt{1 + \varepsilon^2}$, $f_1 = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$ и $M = 1$.

3.2 Система с двумя реле

3.2.1 Постановка задачи

Полное описание системы с двумя реле дается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ y = y_1 + y_2, \\ x(t_0) = x_0, \\ y_1(t) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_{01}), \\ y_2(t) = R_{t_0}^t(\gamma, \delta, x)(y_{02}). \end{cases} \quad (103)$$

Здесь:

$y_1(t), y_2(t)$ – выходные функции для первого и второго реле в виде локально явного уравнения (2), которые отвечают непрерывной входной функции $x : [t_0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$;

$y(t)$ – суммарный выход двух реле.

Будем считать, что пороговые значения двух реле вложены, именно, $\gamma < \alpha$ и $\beta < \delta$. Тогда нас интересует вопрос: при каких условиях на $f(x, 0), f(x, 1), f(x, 2)$, начиная с некоторого момента, решение системы (103) является периодическим.

3.2.2 Утверждение о существовании периодического решения

Пусть функции $f(x, 0), f(x, 1), f(x, 2)$ удовлетворяют локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:

$$\text{на } [\alpha, +\infty) \quad f(x, 2) < 0,$$

$$\text{на } (-\infty, \beta] \quad f(x, 0) > 0,$$

$$\text{на } \left[\gamma, \frac{\alpha + \beta}{2}\right] \quad f(x, 1) < 0,$$

$$\text{на } \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \delta\right] \quad f(x, 1) \geq r > 0, \text{ причём}$$

существует конечный предел $f(x, 1)$ при $x \rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} + 0$.

Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\alpha+\beta}{2}\}$ каждое решение системы (103), начиная с некоторого момента, является периодическим вправо и любые два решения этой системы, начиная с некоторого момента, совпадают с точностью до сдвига по времени. Это означает, что в фазовом пространстве (x, y) данная система имеет замкнутую траекторию, в которую за конечное время вливается любая другая траектория.

Доказательство. Сначала заметим, что областью $\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ допустимых состояний суммарного реле является множество точек (x, y) плоскости, лежащих на двух полупрямых и одном отрезке: $y = 0$ при $x \leq \beta$; $y = 2$ при $x \geq \alpha$ и $y = 1$ при $x \in [\gamma, \delta]$ (см. Рис. 5).

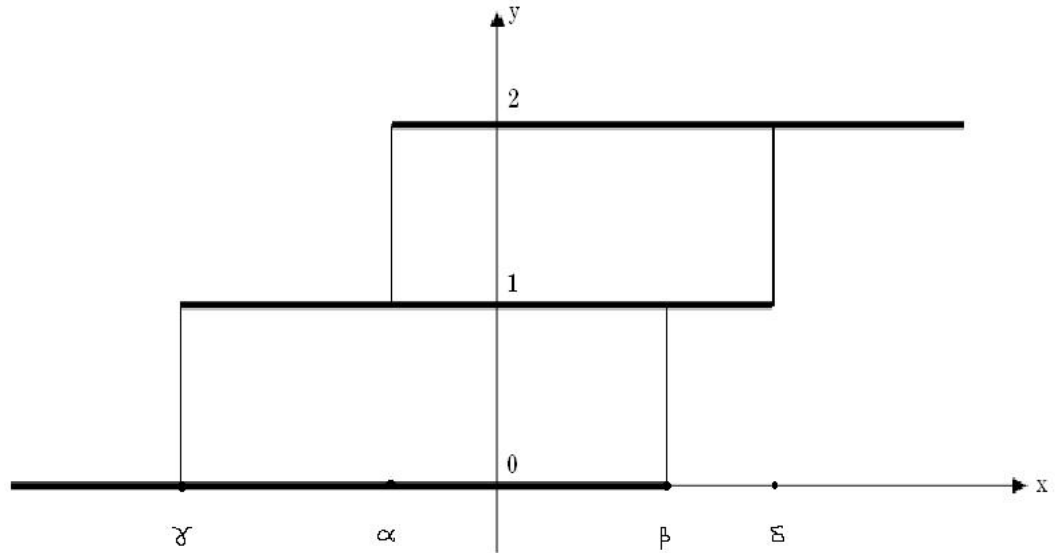


Рис. 5. Область допустимых состояний суммарного реле.

В силу условий утверждения легко видеть, что существуют следующие числа:

$$\lambda_1 = \max\{f(x, 2) : x \in [\alpha, \max\{x_0, \delta\}]\} < 0; \quad (104)$$

$$\Lambda_1 = \min\{f(x, 0) : x \in [\min\{x_0, \gamma\}, \beta]\} > 0; \quad (105)$$

$$\lambda_2 = \max\{f(x, 1) : x \in [\gamma, \frac{\alpha + \beta}{2}]\} < 0; \quad (106)$$

$$\Lambda_2 = \min\{f(x, 1) : x \in (\frac{\alpha + \beta}{2}, \delta]\} \geq r > 0. \quad (107)$$

Пусть $x = \varphi(t)$ – решение системы (103). Докажем, что существует такой момент t_* , что $\varphi(t_*) = \delta$ или $\varphi(t_*) = \gamma$. Для доказательства рассмотрим три случая, соответствующие трем значениям $y(t)$ после начального момента t_0 . В первом случае, когда $y = 0$ и $x_0 < \beta$, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, 0), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Пока ни одно из двух реле не переключается, из существования положительного числа Λ_1 (см. (105)) вытекает, что решение $\varphi(t)$ данной системы строго возрастает и $\dot{\varphi}(t) \geq \Lambda_1 > 0$, следовательно, $\varphi(t)$ достигает значения β в некоторый момент τ_1 . После этого момента $y(t) = 1$ (так как первое реле включено) и, тогда, рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, 1), \\ x(\tau_1) = \beta. \end{cases}$$

В силу определения числа Λ_2 в (107) получим, что решение $\varphi(t)$ последней системы достигает значения δ в некоторый момент, который мы обозначаем через t_* .

По аналогии с первым случаем для второго случая, когда $y = 2$ и $x_0 < \gamma$, можно доказать, что существует момент $t_* : \varphi(t_*) = \gamma$.

В последнем случае, когда $y = 1$ и $x_0 \in (\gamma, \delta)$, снова по аналогии с первым случаем, можно получить существование момента $t_* : \varphi(t_*) = \gamma$, если $\gamma < x_0 < \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\varphi(t_*) = \delta$, если $\frac{\alpha+\beta}{2} < x_0 < \delta$.

Теперь докажем, что начиная с момента $t_* : x(t_*) = \delta$ решение $\varphi(t)$ является периодическим. Действительно, после момента t_* суммарный выход $y(t) = 2$, следовательно, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, 2), \\ x(t_*) = \delta. \end{cases}$$

В силу существования числа λ_1 , определяемого в (104), получим, что пока ни одно из двух реле не переключается, решение $\varphi(t)$ строго убывает

вает и оно достигает значения α в некоторый момент $t = t_1$. После этого момента $y(t) = 1$ (так как первое реле переключено с 1 на 0) и, далее, из определения числа λ_2 в (106) следует, что решение $\varphi(t)$ принимает значение γ в момент $t = t_2$. Продолжив аналогичное рассуждение, можно получить, что решение $\varphi(t)$ достигает значения β в t_3 и δ в t_4 .

Докажем, что это решение периодически с периодом $T = t_4 - t_*$. Поскольку реле обладает свойством автономности и правые части первых трех уравнений в рассматриваемой системе (103) не зависят от t , то эта система автономна. Отсюда следует, что любая тройка функций $\psi(t) = \varphi(t+c)$, $z_1(t) = y_1(t+c)$, $z_2(t) = y_2(t+c)$ вместе с $\varphi(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ является решением этой системы. В частности, при $c = T$ получаем решение, которое в точке $t = t_*$ принимает значения, равные $\varphi(t_*)$, $y_1(t_*)$, $y_2(t_*)$. Но тогда, очевидно, решения совпадают всюду, т.е. построенное решение является T -периодическим.

Описанный процесс построения решения позволяет дать следующую формулу для вычисления периода:

$$T = \int_{\delta}^{\alpha} \frac{dx}{f(x, 2)} + \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{dx}{f(x, 1)} + \int_{\gamma}^{\beta} \frac{dx}{f(x, 0)} + \int_{\beta}^{\delta} \frac{dx}{f(x, 1)}.$$

Если в момент t_* $x(t_*) = \gamma$, то очевидно, решением системы (103) является $\psi(t) = \varphi(t+t_2)$, т.е. $\psi(t)$ периодическое и совпадает с построенным решением $\varphi(t)$ со сдвигом t_2 . Утверждения 3.2.2 полностью доказаны.

3.3 Бесконечная система реле

Рассмотрим бесконечную систему реле r_n с пороговыми значениями $(-n, n)$, общей входной функцией $x(t)$ и выходными функциями $y_n(t)$ в виде локально явного уравнения (2), где $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $t > t_0 \geq -\infty$ выходная функция $y(t)$ бесконечной системы реле определяется следующей формулой:

$$y(t) = R_{t_0}^t(\gamma, x)(\eta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} R_{t_0}^t(-n, n, x)(y_{n0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} y_n(t). \quad (108)$$

Здесь:

$\gamma = \{(-n, n), n \in \mathbb{N}\}$ – множество пар пороговых значений,

$\eta_0 = \{y_{n0}, n \in \mathbb{N}\}$ – множество начальных значений выходов.

Прежде чем формулировать утверждения о существовании и единственности периодического выхода бесконечной системы реле, рассмотрим следующую вспомогательную известную лемму.

3.3.1 Лемма о двоичной системе

Пусть $s_k (k \in \mathbb{N})$ имеет значение 0 или 1. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} s_k$ при всех наборах значений $s_k (k \in \mathbb{N})$ заполняет отрезок $[0, 1]$.

Доказательство. Для доказательства этой леммы мы должны доказать, что для любого $s \in [0, 1]$ существует последовательность $\{s_k\}$, такая, что $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} s_k$.

Построение $\{s_k\}$: разделим отрезок $[0, 1]$ на 2 равных части. Если s лежит в левой, то в качестве s_1 возьмем $s_1 = 0$, а если в правой, то возьмем $s_1 = 1$. Очевидно, выполнено неравенство $|s - \frac{s_1}{2}| < \frac{1}{2^1}$. Продолжать разделить отрезок, содержащийся s на 2 равных части. Если s лежит в левой из этих частей, то возьмем $s_2 = 0$, а если в правой, то возьмем $s_2 = 1$. Тогда также выполнено неравенство

$$|s - \frac{s_1}{2} - \frac{s_2}{2^2}| < \frac{1}{2^2}.$$

Аналогично мы можем построить $s_k (3 \leq k \leq n)$ и будет выполнено неравенство $|s - \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{2^k}| < \frac{1}{2^n}$. При $n \rightarrow \infty$ следует, что $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k}{2^k}$. Лемма доказана.

3.3.2 Утверждение о существовании периодического выхода

Для любого T -периодического непрерывного входа x и любой η_0 соответствующий выход $R_{t_0}^t(\gamma, x)(\eta_0)$, определяемый формулой (108), является T -периодическим.

Доказательство. Поскольку вход $x(t)$ непрерывный и T – периодический, то существует такое целое число $N = N(x)$, что

$$N \leq \max\{|x(t)| : t \in [0, T]\} < N + 1. \quad (109)$$

После этого, $y(t)$ – выход бесконечной системы реле можно записать в следующем виде:

$$y(t) = y^N(t) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} y_{n0}, \quad (110)$$

где $y^N(t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} y_n(t)$ – сумма выходов первых N реле.

В силу существования числа N , определяемого в (109), получим, что $|x(t)| < N + 1$ при всех $t \geq t_0$; существует момент $t_* \in [t_0, +\infty)$: $|x(t_*)| \geq N$ и, тем самым, $x(t_*) \in (-\infty, -n] \cup [n, +\infty)$ при всех $n \leq N$. Тогда из утверждения о периодических входах и выходах (см. параграф 1.5) вытекает, что выходы $y_n(t)$ ($n \leq N$), а также $y^N(t)$ – сумма выходов первых N реле, являются T -периодическими, причем, очевидно, они не зависят от η_0 , а зависят только от входа x . Кроме этого, для любого $n \geq N+1$ $y_n(t) = y_{n0}$ при $t \in [t_0, +\infty)$. Отсюда и из (110) непосредственно следует, что выход бесконечной системы реле является T -периодическим. Утверждение 3.3.2 доказано.

3.3.3 Утверждение о существовании и единственности периодического выхода

Для любого T -периодического непрерывного входа x при каждом λ из некоторого отрезка $\lambda_p = [\lambda_1, \lambda_2]$, зависящего от x , y бесконечной системы реле существует единственный T -периодический выход y со средним значением λ .

Доказательство. Напомним, что средним значением T -периодической функции $y(t)$ называется величина $\bar{y} = \frac{\int_0^T y(t) dt}{T}$.

В силу представления выхода $y(t)$ в виде (110), получим, что среднее

значение этого выхода \bar{y} определяется следующей формулой:

$$\bar{y} = \bar{y}^{(N)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} y_{n0}, \quad (111)$$

где число $N = N(x)$ было определено в предыдущем пункте.

Согласно лемме о двоичной системе, нетрудно проверить, что правая часть (111) при изменении η_0 заполняет отрезок

$$\lambda_p = [\lambda_1, \lambda_2] = [\bar{y}^{(N)}, \bar{y}^{(N)} + 2^{-N}];$$

очевидно, этот отрезок зависит только от входа x .

Из (110) и (111) вытекает справедливость следующего равенства

$$y(t) = \bar{y} - \bar{y}^{(N)} + y^{(N)}(t),$$

в котором правая часть зависит только от x и \bar{y} . Поэтому для T – периодического входа x выход, определяемый формулой (108) является T – периодическим (см. п. 3.3.2) и однозначно определяется своим средним значением. Утверждение 3.3.3 полностью доказано.

4 Гладкое описание упора и люфта

4.1 Постановка задачи

Для непрерывной на $[t_0, T]$ функции $x(t)$ определим "сглаженную" входную функцию $\xi(t)$ соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = K[x(t) - x(t - \frac{1}{K})], \\ \xi(t_0) = x(t_0) =: x_0, \end{cases} \quad (112)$$

(при $t < t_0$ полагаем $x(t) = x(t_0)$).

Здесь мы дадим новые описания упора и люфта, которые будем называть *гладкими* – в отличие от приведенных выше *классических* из [19] описаний (см. (3) и (4)). Именно, гладкие выходные функции упора $u(t)$ и люфта $v(t)$, соответствующие непрерывному входу $x(t)$ и (большому) параметру K , определим уравнениями:

$$\dot{u} = \dot{\xi} + K[(-u(t))_+ - (u(t) - 1)_+], \quad (113)$$

$$\dot{v} = K[(\xi(t) - v(t))_+ - (v(t) - 1 - \xi(t))_+], \quad (114)$$

где $\xi = \xi(t)$ – определенная выше "сглаженная" входная функция для x .

Задача заключается в том, что найти оценки разностей между выходами гладких и классических описаний и, тем самым, оценить скорость сходимости гладких выходов к классическим при $K \rightarrow +\infty$.

4.2 Утверждение об оценке близости выходов упора с гладким входом

Пусть $y(t)$ есть гладкая (точнее, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая) на $[t_0, T]$ функция. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\dot{\bar{u}} = \dot{y} + K[(-\bar{u}(t))_+ - (\bar{u}(t) - 1)_+]. \quad (115)$$

Оно определяет *гладкий* выход упора $\bar{u}(t)$ при гладком входе $y(t)$. Пусть $\bar{\varphi}(t)$ – классический выход упора, отвечающий гладкому входу $y(t)$ (см. (3)) и начальному условию $\bar{\varphi}(t_0) = \bar{u}(t_0) =: u_0$.

Теперь утверждение об оценке близости выходов упора с гладким входом можно формулировать следующим образом: *для любого $K > 0$ на $[t_0, T]$ верно неравенство*

$$|\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t)| \leq \frac{C}{K}, \quad (116)$$

где $C = \sup\{|\dot{y}(t)| : t \in [t_0, T]\}$.

Доказательство. При $C = 0$ соотношение (116) выполнено, так как выходные функции тождественно совпадают с их начальными значениями. Поэтому будем впредь считать, что $C > 0$. Предположим, что неравенство (116) выполнено не для всех $t \in [t_0, T]$. Тогда существуют такие $t_1 \in [t_0, T]$ и $\delta > 0$, что

$$|\bar{u}(t_1) - \bar{\varphi}(t_1)| = \frac{C}{K}, \quad (117)$$

$$|\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t)| > \frac{C}{K} \quad \text{при } t \in (t_1, t_1 + \delta). \quad (118)$$

Если $\bar{u}(t_1) - \bar{\varphi}(t_1) = \frac{C}{K}$, то в силу непрерывности функций $\bar{u}(t)$, $\bar{\varphi}(t)$ на $[t_0, T]$ и положительности C неравенство (118) записывается в следующем виде

$$\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t) > \frac{C}{K} \quad \text{при } t \in (t_1, t_1 + \delta). \quad (119)$$

Будем доказывать, что в тех точках $t \in (t_1, t_1 + \delta)$, в которых $\bar{\varphi}(t)$ удовлетворяет уравнению (3), верно неравенство

$$\frac{d}{dt}(\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t)) \leq 0. \quad (120)$$

Из (119) непосредственно следует, что $\bar{u}(t) > 0$ на $(t_1, t_1 + \delta)$. Если $\bar{u}(t) \in (0, 1]$, то из (119) вытекает, что в данной точке $\bar{\varphi}(t) \in [0, 1)$. Тогда из уравнений (3) и (115) следует, что

$$\frac{d}{dt}(\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t)) = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{\varphi} \in (0, 1); \\ \dot{y} - \max\{0, \dot{y}\}, & \text{если } \bar{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (121)$$

(здесь и в дальнейшем для краткости иногда вместо $\bar{\varphi}(t)$ пишем $\bar{\varphi}$). Отсюда непосредственно получается неравенство (120). Если $\bar{u}(t) > 1$, то из уравнений (3) и (115) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}(\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t)) = \begin{cases} -K(\bar{u}(t) - 1), & \text{если } \bar{\varphi} \in (0, 1); \\ \dot{y} - K(\bar{u}(t) - 1) - \max\{0, \dot{y}\}, & \text{если } \bar{\varphi} = 0; \\ \dot{y} - K(\bar{u}(t) - 1) - \min\{0, \dot{y}\}, & \text{если } \bar{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (122)$$

Поэтому нетрудно видеть, что неравенство (120) верно в случае, когда $\bar{\varphi} \in [0, 1)$. Если $\bar{\varphi} = 1$, то из (119) следует, что $\bar{u}(t) - 1 > C/K$. Тогда

$$\dot{y} - K(\bar{u}(t) - 1) - \min\{0, \dot{y}\} < \dot{y} - C - \min\{0, \dot{y}\} \leq 0,$$

т.е. (120) верно и в случае, когда $\bar{\varphi} = 1$.

Из справедливости (120) и (117) непосредственно следует, что на $(t_1, t_1 + \delta)$

$$\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t) \leq \bar{u}(t_1) - \bar{\varphi}(t_1) = \frac{C}{K},$$

тем самым получено противоречие с (118).

Если $\bar{u}(t_1) - \bar{\varphi}(t_1) = -\frac{C}{K}$, то неравенство (118) записывается в следующем виде:

$$\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t) > \frac{C}{K} \quad \text{при } t \in (t_1, t_1 + \delta).$$

Дальше, аналогично, можно доказать, что при $t \in (t_1, t_1 + \delta)$ будет верно неравенство

$$\frac{d}{dt}(\bar{\varphi}(t) - \bar{u}(t)) \leq 0$$

(если в точке t $\bar{\varphi}$ удовлетворяет (3)). Отсюда следует противоречие с (118). Утверждение доказано.

4.3 Утверждение об оценке близости выходов упора с непрерывным входом

Пусть $\varphi(t)$, $u(t)$ – решения, соответственно, уравнения (3) и (113), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\varphi(t_0) = u(t_0) = u_0.$$

Тогда для любого $K > 0$ на $[t_0, T]$ будет верна следующая оценка:

$$|u(t) - \varphi(t)| \leq 3\omega(x, \frac{1}{K}), \quad (123)$$

где $\omega(x, \delta)$ – модуль непрерывности для непрерывной функции x и она определяется равенством

$$\omega(x, \delta) = \sup\{|x(t') - x(t'')| : t', t'' \in [t_0, T] \text{ и } |t' - t''| \leq \delta\}. \quad (124)$$

Доказательство. Сначала обозначим через $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2$) сглаженные входные функции (см. систему (112)), соответствующие параметрам K_1 и K_2 ; $\varphi_i(t)$ – решения уравнения (3), в котором \dot{x} заменено на $\dot{\xi}_i$, с начальным условием $\varphi_i(t_0) = u_0$. В силу утверждения в параграфе 4.2 нетрудно видеть, что с начальным условием $u_i(t_0) = u_0$ для решения $u_i(t)$ ($i = 1, 2$) уравнения (113), в котором параметр K принимает значение K_i , верно следующее неравенство:

$$|u_i(t) - \varphi_i(t)| \leq \frac{\sup\{|\dot{\xi}_i(t)| : t \in [t_0, T]\}}{K_i}. \quad (125)$$

Согласно с определением модули непрерывности $\omega(x, \delta)$ (см. равенство (124)) нетрудно проверить, что неравенство (125) можно записать в виде

$$|u_i(t) - \varphi_i(t)| \leq \omega(x, \frac{1}{K_i}). \quad (126)$$

Воспользуемся упоминавшимся выше известным фактом, что оператор упора (3) удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом 2 (см. [19] с. 16), т.е. при $t \in [t_0, T]$

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq 2\|\xi_1 - \xi_2\|. \quad (127)$$

Далее, оценим близость $\xi_i(t)$ к $x(t)$ с помощью модуля непрерывности: из определения функции $\xi_i(t)$ как решения задачи (112) вытекает, что при $t \in [t_0, T]$

$$\xi_i(t) = x(t_0) + K_i \int_{t_0}^t x(s)ds - K_i \int_{t_0 - \frac{1}{K_i}}^{t - \frac{1}{K_i}} x(s)ds = K_i \int_{t - \frac{1}{K_i}}^t x(s)ds$$

и, следовательно,

$$\xi_i(t) - x(t) = K_i \int_{t - \frac{1}{K_i}}^t [x(s) - x(t)] ds.$$

Отсюда непосредственно следует, что при $t \in [t_0, T]$

$$|\xi_i(t) - x(t)| \leq \omega(x, \frac{1}{K_i}). \quad (128)$$

В силу (128) неравенство (127) записывается в виде:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq 2\omega(x, \frac{1}{K_1}) + 2\omega(x, \frac{1}{K_2}). \quad (129)$$

Поскольку

$$|u_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |u_1(t) - \varphi_1(t)| + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|, \quad (130)$$

то из (126) и (129) вытекает, что

$$|u_1(t) - \varphi_2(t)| \leq 3\omega(x, \frac{1}{K_1}) + 2\omega(x, \frac{1}{K_2}). \quad (131)$$

Если теперь значение $K_1 = K$ фиксировано и $K_2 \rightarrow +\infty$, то $\xi_2(t)$ равномерно на $[t_0, T]$ сходится к $x(t)$, а $\varphi_2(t)$ – к классическому выходу $\varphi(t)$ упора, соответствующему непрерывному входу $x(t)$. Отсюда и из (131) непосредственно следует справедливость оценки (123), т.е. доказано утверждение.

4.4 Утверждение об оценке близости для выхода люфта с непрерывным входом

Пусть $\psi(t)$, $v(t)$ – решения, соответственно, уравнения (4) и (114), удовлетворяющие начальным условиям

$$\psi(t_0) = v(t_0) = v_0.$$

Тогда для любого $K > 0$ на $[t_0, T]$ будет верна следующая оценка

$$|v(t) - \psi(t)| \leq 2\omega(x, \frac{1}{K}). \quad (132)$$

(см. (124)).

Доказательство. Обозначим $v_i(t)$ ($i = 1, 2$) есть решение уравнения (114), в котором параметр K принимает значение K_i , причем $v_i(t_0) = v_0$. Для каждого i положим $z_i(t) = v_i(t) - \xi_i(t)$, тогда

$$\dot{z}_i = -\dot{\xi}_i + K_i[(-z_i(t))_+ - (z_i(t) - 1)_+]. \quad (133)$$

Дифференциальное уравнение (133) означает, что $z_i(t)$ есть гладкий выход упора, соответствующий гладкому входу $-\dot{\xi}_i$, параметру K_i (см. уравнение (113)) и начальному условию $z_i(t_0) = v_0 - x_0$. Если обозначим через $\bar{\varphi}_i(t)$ решение уравнения (3), в котором \dot{x} заменено на $-\dot{\xi}_i$, с начальным условием $\bar{\varphi}_i(t_0) = v_0 - x_0$, то в силу утверждения в параграфе 4.2 получим, что

$$|z_i(t) - \bar{\varphi}_i(t)| \leq \frac{\sup\{|\dot{\xi}_i(t)| : t \in [t_0, t_0 + T]\}}{K_i}.$$

Отсюда и из равенства (124) вытекает, что

$$|z_i(t) - \bar{\varphi}_i(t)| \leq \omega(x, \frac{1}{K_i}). \quad (134)$$

Если $\psi_i(t) = \bar{\varphi}_i(t) + \xi_i(t)$, то $\psi_i(t)$ есть решение уравнения (4), в котором x заменено на ξ_i , с начальным условием $\psi_i(t_0) = v_0$. Это означает, что $\psi_i(t)$ является классическим выходом люфты, отвечающим входу $\xi_i(t)$. Отсюда и из (134) следует, что

$$|v_i(t) - \psi_i(t)| = |z_i(t) - \bar{\varphi}_i(t)| \leq \omega(x, \frac{1}{K_i}). \quad (135)$$

Далее, в силу леммы 2.2 (см. [19] с. 16, 17) получим, что оператор люфты (4) удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом 1, т.е.

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \|\xi_1 - \xi_2\|.$$

По аналогии с доказательством утверждения в параграфе 4.3 получим, что

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \omega(x, \frac{1}{K_1}) + \omega(x, \frac{1}{K_2}). \quad (136)$$

Поскольку

$$|v_1(t) - \psi_2(t)| \leq |v_1(t) - \psi_1(t)| + |\psi_1(t) - \psi_2(t)|,$$

то из неравенств (135) и (136) следует, что при $t \in [t_0, T]$ будет верно следующее неравенство:

$$|v_1(t) - \psi_2(t)| \leq 2\omega(x, \frac{1}{K_1}) + \omega(x, \frac{1}{K_2}). \quad (137)$$

Снова, по аналогии с доказательством утверждения в параграфе 4.3 получим, что если в неравенстве (137) значение $K_1 = K$ фиксировано и $K_2 \rightarrow +\infty$, то в пределе получается оценка (132), т.е. доказано утверждение.

4.5 Эксперименты численного анализа и оценки близости

Для численного анализа систем (3) и (4) воспользуемся гладким описанием упора и люфта (см. параграф 4.1). После того, с помощью программы Mathematica 7.0. приведем результаты численных решений уравнений (113) и (114). Для этого возьмем: $x(t) = -\frac{|t \sin t - 1|}{2} + 2$, $u_0 = 0.8$ и $v_0 = 1.7$.

Если возьмем $K = K_1 = 10^6$, то решения уравнения (113) и (114) вместе с заданным входом будут изображены, соответственно, на Рис. 6 и Рис. 7

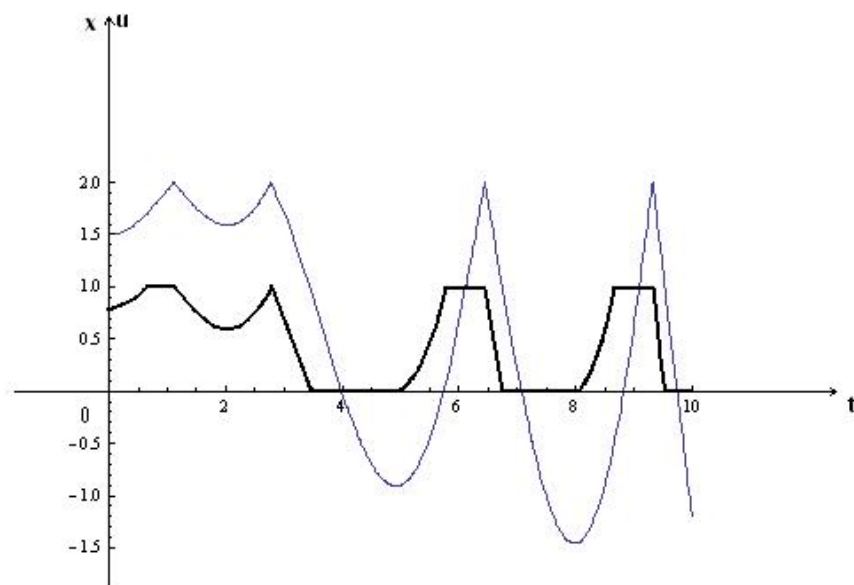


Рис. 6. Вход и выход упора.

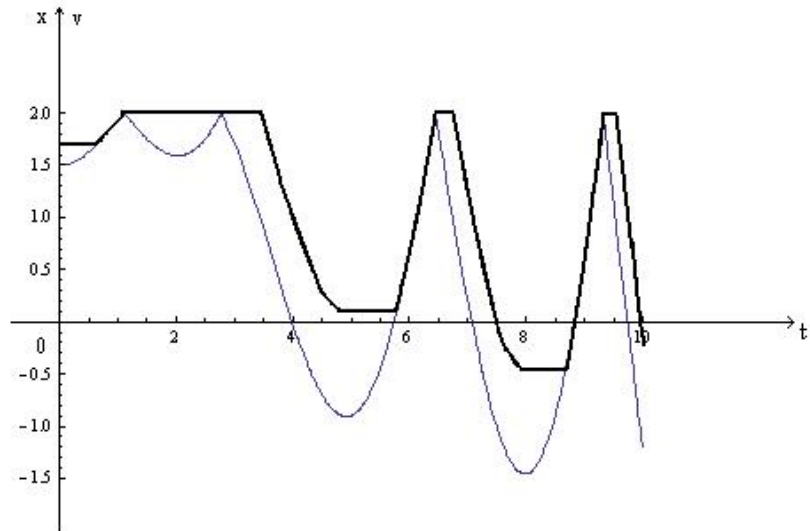


Рис. 7. Вход и выход люфта.

Для заданной входной функции $x(t)$ и параметра $K = 10^6$ с помощью программы Mathematica 7.0 можно оценить модуль непрерывности:

$$\omega(x, \frac{1}{K}) = \sup\{|x(t') - x(t'')| : t', t'' \in [0, 10] \text{ и } |t' - t''| \leq \frac{1}{K}\} \leq 10^{-5}.$$

Тогда по теоремам в параграфах 4.3 и 4.4 получаются оценки (123) и (132), правые части которых можно сверху оценить, соответственно, величинами $3 \cdot 10^{-5}$ и $2 \cdot 10^{-5}$.

Если возьмем другой параметр $K = \frac{K_1}{2}$, то решения уравнения (113) (или (114)), в котором $K = K_1$ и $K = \frac{K_1}{2}$ практически совпадают. Это означает, что изучаемое гладкое описание упора и люфта в параграфе 4.1 дает устойчивый результат, который не зависит от параметра K при K достаточно большом.

Если возьмем значение параметра K маленькое, например, $K = 10$, то гладкое описание упора и люфта в параграфе 4.1 дает неустойчивый результат. Для наблюдения этого, смотрите на рисунке Рис. 8, на котором изображены непрерывный вход $x(t)$ и решение уравнения (113) (выход упора $u(t)$), в котором $K = 10$. На этом рисунке видно, что выход упора $u(t)$ движется и за пределами отрезка $[0, 1]$. Это противоречит феноменологическому описанию упора (см. введение).

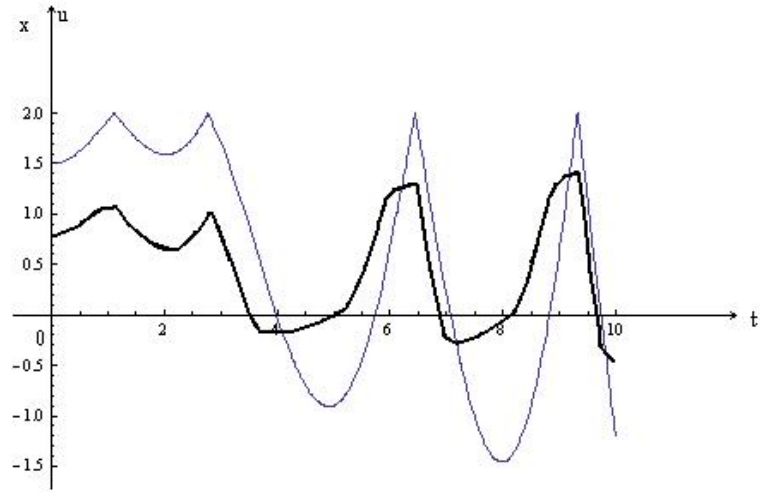


Рис. 8. Вход и выход упора при $K = 10$.

5 Гладкое описание системы с диодной нелинейностью

5.1 Постановка задачи

Системы с диодными нелинейностями введены в рассмотрение [26] в качестве математического описания электрических цепей с диодными преобразователями тока. Следуя [20], [22], мы рассматриваем обобщенную систему с диодной нелинейностью. Пусть Q – непустое выпуклое замкнутое множество в \mathbb{R}^n . Тогда обобщенная система с диодной нелинейностью имеет вид:

$$\dot{x} = \tau_x f(t, x). \quad (138)$$

Здесь $\tau_x f(t, x)$ – проекция вектора $f(t, x)$ на T_x – касательный конус к Q в точке x (см. [19] с. 109).

Предполагается, что для $t \in [t_0, t_0 + T]$ и $x \in Q$, функция $f(t, x)$ непрерывна по первому аргументу t при любом фиксированном втором аргументе x ; удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу x с константой L и ограничена по норме константой C .

Правая часть системы (138) может терпеть разрыв на границе множества Q . Под решением этой системы понимается локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая ей почти всюду. Наряду с (138) рассмотрим *гладкое описание*, которое определяется следующим уравнением:

$$\dot{y} = f(t, \bar{y}) - K(y - \bar{y}), \quad (139)$$

где $\bar{y} = P(y, Q)$ – проекция y на Q , K – большой параметр.

Кроме этого, в частном случае по сравнению с описанием (139) введено другое гладкое описание – более эффективное, не использующее оператора проектирования, значения которого вычисляются достаточно сложно.

Цель исследования – оценить расстояние между решениями гладких описаний и системы (138) с одинаковыми начальными условиями.

5.2 Теорема о точности гладкого описания системы с диодной нелинейностью

Пусть $x(t), y(t)$ – решения, соответственно, систем (138) и (139) удовлетворяющие начальным условиям:

$$y(t_0) = x(t_0) = x_0 \in Q. \quad (140)$$

Тогда при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ верна следующая оценка:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \frac{Ce^{LT}}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{K}}. \quad (141)$$

Доказательство. Обозначим через N_x нормальный к Q конус в точке x и через $\nu_x z$ – проекцию вектора $z \in \mathbb{R}^n$ на N_x . Как известно (см. [19], с. 110), справедливо равенство

$$z = \tau_x z + \nu_x z,$$

причем слагаемые в правой части взаимно ортогональны. Поэтому систему (138) можно записать в виде:

$$\dot{x} = f(t, x) - \nu_x f(t, x).$$

В тех точках $x \in Q$, в которых \dot{x} существует, мы оценим величину $p = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x - y\|^2$:

$$p = (\dot{x} - \dot{y}, x - y) = (f(t, x) - f(t, \bar{y}) - \nu_x f(t, x) + K(y - \bar{y}), x - y). \quad (142)$$

Из условия Липшица для функции f следует, что

$$(f(t, x) - f(t, \bar{y}), x - y) \leq L \|x - \bar{y}\| \|x - y\|.$$

Воспользовавшись тем известным фактом (см., например, [19], с. 109), что оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество в евклидовом пространстве является нерастягивающим, получим:

$$(f(t, x) - f(t, \bar{y}), x - y) \leq L \|x - y\|^2.$$

Отсюда и из (142) следует:

$$p \leq L\|x - y\|^2 + (\nu_x f(t, x), y - x) + K(y - \bar{y}, x - \bar{y}) + K(y - \bar{y}, \bar{y} - y).$$

Очевидно, последнее слагаемое в правой части не больше нуля.

Нетрудно проверить, что справедлива следующая эквивалентность:

$$\bar{y} = P(y, Q) \Leftrightarrow \forall(x \in Q)[(y - \bar{y}, x - \bar{y}) \leq 0]. \quad (143)$$

Поэтому

$$p \leq L\|x - y\|^2 + (\nu_x f(t, x), y - x) \quad (144)$$

и, тем самым,

$$p \leq L\|x - y\|^2 + (\nu_x f(t, x), y - \bar{y}) + (\nu_x f(t, x), \bar{y} - x).$$

Из определения нормального конуса (см. [19], с.109) вытекает, что $(\nu_x f(t, x), \bar{y} - x) \leq 0$. Следовательно,

$$p \leq L\|x - y\|^2 + (\nu_x f(t, x), y - \bar{y}).$$

По аналогии с [20] можно получить оценку удаления y от Q :

$$\|y - \bar{y}\| \leq \frac{C}{K}.$$

Далее, воспользовавшись ограниченностью функции f , получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x - y\|^2 \leq L\|x - y\|^2 + \frac{C^2}{K}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что абсолютно непрерывная функция $u(t) = \|x(t) - y(t)\|^2$ удовлетворяет линейному неоднородному уравнению

$$\dot{u} = 2Lu + 2\frac{C^2}{K} - b(t)$$

с неотрицательной суммируемой функцией $b(t)$. С учетом равенства $u(t_0) = 0$ можно, как и в элементарной теории уравнений с непрерывными коэффициентами, получить:

$$u(t) = 2 \int_{t_0}^t e^{2L(t-s)} \left[\frac{C^2}{K} - \frac{b(s)}{2} \right] ds.$$

Следовательно, при $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$u(t) \leq 2 \frac{C^2}{K} \int_{t_0}^t e^{2L(t-s)} ds \leq \frac{C^2}{LK} e^{2LT},$$

т.е. справедливо неравенство (141). Теорема полностью доказана.

5.3 Частный случай

В двумерном пространстве \mathbb{R}^2 рассмотрим множество Q как пересечение двух полупространств Q_1 и Q_2 , которые являются множествами векторов z , соответственно, удовлетворяющих при некоторых фиксированных единичных $n_i \in \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2$) неравенствам $(n_i, z) \leq 0$. При этом вектор n_i называется *внешней нормалью* к полупространству Q_i . Нетрудно видеть, что такое множество Q является непустым, замкнутым и выпуклым. Пусть n_1, n_2 не коллинеарны и $\omega \in (0, \pi)$ – меньший из двух углов между этими векторами. В частном случае *гладкое описание* определяется следующим уравнением:

$$\dot{z} = f(t, z) - K \max\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\} \sum_{l \in M(z)} n_l, \quad (145)$$

где

$$l \in M(z) \Leftrightarrow (n_l, z) = \max\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\}.$$

Теорема.

Пусть $x(t), z(t)$ – решения систем (138), (145), соответственно, удовлетворяющие начальным условиям:

$$z(t_0) = x(t_0) = x_0 \in Q.$$

Тогда при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ верна следующая оценка:

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \frac{C e^{LT}}{\sqrt{L \min\{2 \cos \frac{\omega}{2}, 1\} \cos \frac{\omega}{2}} \sqrt{K}}. \quad (146)$$

Доказательство. В тех точках $x \in Q$, в которых \dot{x} существует, мы оценим величину $p = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x - z\|^2$. Будем оценивать эту величину в двух

случаях. Первый случай, когда значение $\max\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\}$ достигается одним из значений $(n_1, z)_+, (n_2, z)_+$. Для определенности будем считать, что $\max\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\} = (n_1, z)_+$. Тогда уравнение (145) записывается в виде

$$\dot{z} = f(t, z) - K(z - z_1),$$

где $z_1 = P(z, Q_1)$.

Если $z_1 \in Q$, то по аналогии с доказательством теоремы 5.2 получим, что

$$p \leq L\|x - z\|^2 + \frac{C^2}{K}. \quad (147)$$

Если $z_1 \notin Q$, то нетрудно проверить, что проекция \bar{z} точки z на Q является угловой точкой этого множества. Через γ обозначим угол, образуемый векторами $\bar{z}z$ и $\bar{z}z_1$. Легко видеть, что $\gamma \in [\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}, \frac{\pi}{2}]$. По аналогии с [20] можно получить оценку удаления z от Q_1 :

$$\|z - z_1\| \leq \frac{C}{K}$$

– и, следовательно,

$$\|z - \bar{z}\| = \frac{\|z - z_1\|}{\sin \gamma} \leq \frac{C}{K \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2})} = \frac{C}{K \cos \frac{\omega}{2}}. \quad (148)$$

Как и в доказательстве теоремы 5.2, верно неравенство (144), в котором y заменено на z , т.е.

$$p \leq L\|x - z\|^2 + (\nu_x f(t, x), z - x).$$

Далее, нетрудно получить, что

$$p \leq L\|x - z\|^2 + C\|z - \bar{z}\|.$$

Отсюда и из неравенства (148) вытекает, что

$$p \leq L\|x - z\|^2 + \frac{C^2}{K \cos \frac{\omega}{2}}. \quad (149)$$

Итак, в этом случае из неравенств (147) и (149) следует, что для величины p справедливо неравенство (149).

Теперь оценим p во втором случае, когда

$$\max\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\} = (n_1, z)_+ = (n_2, z)_+.$$

Следовательно, уравнение (145) записывается в виде:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f(t, z) - K \max\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\}(n_1 + n_2) = \\ &= f(t, z) - K((n_1, z)_+n_1 + (n_2, z)_+n_2)\end{aligned}$$

и, тем самым,

$$\dot{z} = f(t, z) - K(z - z_1 + z - z_2). \quad (150)$$

Если $z \in Q$, то $z = z_1 = z_2$. Тогда нетрудно получить, что

$$p \leq \|x - z\|^2 + (\nu_x f(t, x), z - x) \leq L\|x - z\|^2 \quad (151)$$

(так как $(\nu_x f(t, x), z - x) \leq 0$ в силу определения нормального конуса).

Если $z \notin Q$, то в этом случае $z \in -Q$ и лежит на биссектрисе угла $z_1\bar{z}z_2$, где z_1, \bar{z} и z_2 являются проекциями, соответственно, на Q_1, Q и Q_2 . Тогда

$$\begin{aligned}z - z_1 + z - z_2 &= \frac{z - \bar{z}}{\|z - \bar{z}\|} 2\|z - z_1\| \cos \frac{\omega}{2} = \\ &= 2(z - \bar{z}) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) \cos \frac{\omega}{2} = 2(z - \bar{z}) \cos^2 \frac{\omega}{2}\end{aligned}$$

и, следовательно, уравнение (150) имеет следующий вид:

$$\dot{z} = f(t, z) - K(z - \bar{z})2 \cos^2 \frac{\omega}{2}.$$

По теореме 5.2 получим, что

$$p \leq L\|x - z\|^2 + \frac{C^2}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} \frac{1}{K}. \quad (152)$$

Во втором случае из неравенств (151) и (152) следует, что для величины p справедливо неравенство (152).

Из неравенств (149) и (152) вытекает, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x - z\|^2 \leq L\|x - z\|^2 + \frac{C^2}{\min\{2 \cos \frac{\omega}{2}, 1\} \cos \frac{\omega}{2}} \frac{1}{K}.$$

Решив это дифференциальное неравенство способом, указанным в параграфе 5.2, непосредственно получим оценку (146).

5.4 Пример

Рассматривается электрическая цепь, которая состоит из сопротивления R , индуктивности \tilde{L} и источника ЭДС, подключенного с помощью диодного двухполупериодного выпрямителя (см. Рис. 9) (см. [25]).

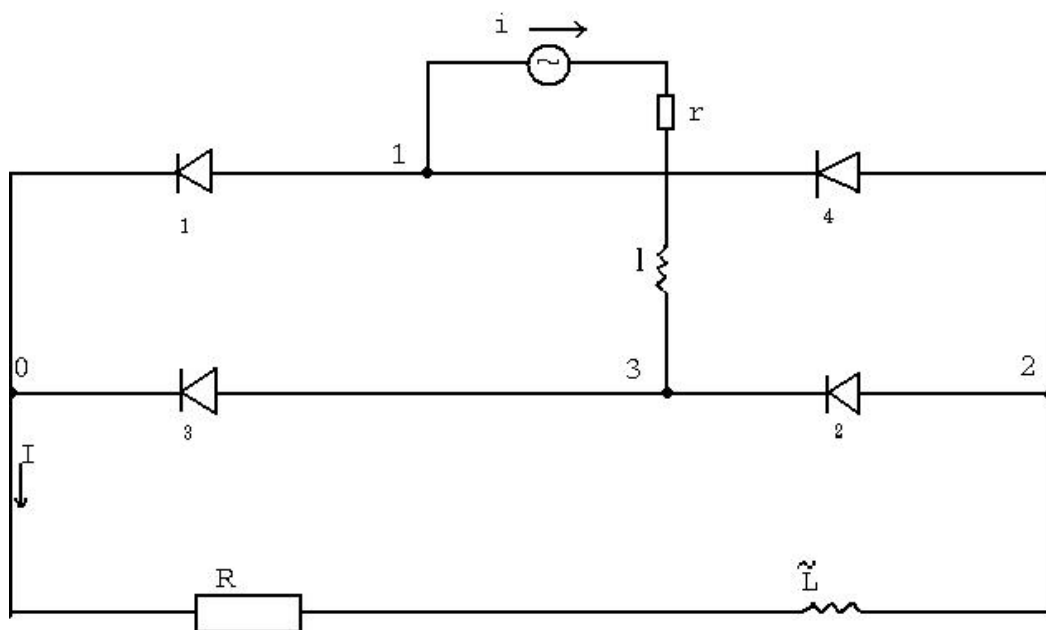


Рис. 9. Двухполупериодный выпрямитель.

Диоды будем считать *идеальными*, т.е. их токи i_k и напряжения u_k от анода к катоду удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} i_k \geq 0, \\ u_k \leq 0, \\ i_k u_k = 0. \end{cases}$$

В цепи питания имеется источник ЭДС, вырабатывающий напряжение $u = -f(t, i)$, сопротивление r , и индуктивность l . Обозначим через u_1 разность потенциалов между первым и нулевым узлами, через u_2 – между вторым и нулевым и через u_3 – между третьим и нулевым. Имеем

систему двух уравнений:

$$\begin{cases} l \frac{di}{dt} + ri + u_3 - u_1 = f(t, i) \\ \tilde{L} \frac{dI}{dt} + RI + u_2 = 0. \end{cases} \quad (153)$$

Сделаем следующие замены переменных:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{l} \\ I\sqrt{\tilde{L}} \end{pmatrix} \text{ и } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_3 - u_1)/\sqrt{l} \\ u_2/\sqrt{\tilde{L}} \end{pmatrix}.$$

После этого система (153) записывается в виде

$$\dot{x} + Ax + y = F(t, x), \quad (154)$$

где $A = \begin{pmatrix} r/l & 0 \\ 0 & R/\tilde{L} \end{pmatrix}$ и $F(t, x) = \begin{pmatrix} f(t, i)/\sqrt{l} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Можно доказать, что x лежит в конусе Q , который является конической оболочкой в \mathbb{R}^2 векторов $\begin{pmatrix} \sqrt{l/\tilde{L}} \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -\sqrt{l/\tilde{L}} \\ 1 \end{pmatrix}$, а y лежит в $N_x Q$ – нормальном конусе к конусу Q в точке x (техника подобных преобразований описана в [27]). Если обозначим $G(t, x) := F(t, x) - Ax$, то получим эквивалентное уравнению (154) дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \tau_x G(t, x). \quad (155)$$

В этом примере множество Q является пересечением двух полупространств, внешними нормальными которыми являются, соответственно, векторы $N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{l/\tilde{L}} \end{pmatrix}$ и $N_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{l/\tilde{L}} \end{pmatrix}$. Наряду с (155) рассмотрим гладкое описание, описываемое уравнением (145), в котором $f(t, z)$ заменено на $G(t, z)$, т.е.

$$\dot{z} = G(t, z) - K \max\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\} \sum_{l \in M(z)} n_l, \quad (156)$$

где n_1, n_2 – единичные векторы, коллинеарные, соответственно, векторам N_1, N_2 . Векторы n_1, n_2 образуют угол ω , который вычисляется следующим образом:

$$\cos \omega = \frac{(N_1, N_2)}{\|N_1\| \|N_2\|} = \frac{l - \tilde{L}}{l + \tilde{L}},$$

и, следовательно,

$$\cos \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{l}{\tilde{L} + l}}.$$

Пусть источник ЭДС таков, что $G(t, x)$ удовлетворяет всем условиям для функции $f(t, x)$ (см. в параграфе 5.1), тогда, применив теорему в предыдущем параграфе, получим, что расстояние между решениями уравнений (155) и (156) с одинаковыми начальными условиями оценивается как в неравенстве (146), в котором $\cos \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{l}{\tilde{L} + l}}$, т.е. при $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \frac{Ce^{LT}}{\sqrt{L \min\{2\sqrt{\frac{l}{\tilde{L} + l}}, 1\}} \sqrt{\frac{l}{\tilde{L} + l}}} \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

5.5 Обобщенная теорема о существовании и единственности предельного цикла (см.[22])

В выпуклом замкнутом множестве $Q \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается система (138), в правой части которой функция f не зависит от t , т.е. следующая система:

$$\dot{x} = \tau_x f(x). \quad (157)$$

Теперь обобщенная теорема формулируется следующим образом.
Пусть выполнены следующие условия:

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R}^2 - \text{липшицева функция}; \quad (158)$$

$$Q \neq \mathbb{R}^2 - \text{выпуклое замкнутое множество}; \quad (159)$$

$$x_* \in \text{int}Q; \quad (160)$$

$$f(x) \notin N_x \text{ при } x \neq x_*; \quad (161)$$

$$(B(x - x_*), f(x)) \geq \mu(\|x - x_*\|), \quad (162)$$

где B – некоторая симметричная положительно определенная матрица, μ – непрерывная функция, $\mu(a) > 0$ при $a > 0$;

$$|(f(x), C(x - x_*))| \geq \nu_0 \|x - x_*\|^2, \quad (163)$$

где $\nu_0 > 0$ и $Cx = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Тогда система (157) имеет единственную замкнутую траекторию, которая орбитально устойчива и в которую вливаются при $t \rightarrow +\infty$ траектории всех решений данной системы.

Доказательство. Сначала заметим, что справедливы следующие соотношения:

$$N_x^Q = N_{x-x_*}^{Q-x_*} \quad (164)$$

и

$$T_x^Q = T_{x-x_*}^{Q-x_*}, \quad (165)$$

где N_x^Q – нормальный к Q конус в точке x . Нетрудно видеть, что соотношение (164) вытекает из определения нормального конуса. Действительно,

$$\begin{aligned} y \in N_x^Q &\Leftrightarrow \forall(\xi \in Q)[(y, \xi - x) \leq 0] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall(\bar{\xi} = \xi - x_* \in Q - x_*)[(y, \bar{\xi} - (x - x_*)) = (y, \xi) \leq 0] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \in N_{x-x_*}^{Q-x_*}. \end{aligned}$$

Соотношение (165) непосредственно следует из (164).

Для доказательства этой обобщенной теоремы сделаем замену переменных. Положим

$$z := x - x_* \text{ и } F(z) := f(z + x_*) = f(x). \quad (166)$$

Отсюда вытекает, что если $x \in Q$, то $z \in Q_* = Q - x_*$. С помощью (166) и соотношения (164) нетрудно проверить, что все условия теоремы о существовании и единственности предельного цикла (см.[22]) выполнены для функции $F(z)$, $z \in Q_*$ и, тем самым, доказана теорема 5.5.

5.6 Пример применения обобщенной теоремы

5.6.1 Постановка задачи

Пусть множество $Q \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклый четырехугольник, вершинами которого являются следующие точки: $O_1(\frac{b}{k}, b)$; $O_2(0, 0)$; $O_3(-a, ka)$ и $O_4(-a, b)$, где $a, b, k > 0$ и $b > ak$. Определим следующие единичные векторы:

$$n_1 = \begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} \\ \frac{-1}{\sqrt{k^2+1}} \end{pmatrix}; \quad n_2 = \begin{pmatrix} \frac{-k}{\sqrt{k^2+1}} \\ \frac{-1}{\sqrt{k^2+1}} \end{pmatrix}; \quad n_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad n_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что множество Q можно представить в виде пересечения четырех полупространств Q_i ($i = \overline{1, 4}$), где полупространство Q_i является множеством векторов $x \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих неравенству $(n_i, x - x_{0_i}) \leq 0$. На этом множестве Q рассматривается система (157), в которой $f(x) = A(x - x_*)$, где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\varepsilon \\ \varepsilon & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \varepsilon > 0;$$

$$x_* = \begin{pmatrix} x_{1*} \\ x_{2*} \end{pmatrix} \in \text{int}Q, \quad \text{следовательно,}$$

$$-a < x_{1*} < \frac{b}{k} \quad \text{и} \quad k|x_{1*}| < x_{2*} < b. \quad (167)$$

Вопрос заключается в том, при каком условии на положительное число ε все условия обобщенной теоремы 5.5 для системы (157) будут выполнены.

5.6.2 Теорема о замкнутой траектории

Существует такое положительное число ε_0 , что для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ система (157) имеет единственную замкнутую траекторию, которая орбитально устойчива и в которую вливаются при $t \rightarrow +\infty$ траектории всех решений данной системы.

Доказательство. Заметим, что в силу определения множества Q и функции $f(x)$ безусловно будут выполнены условия (158) – (160). При этом, в условии (158) константой Липшица функции f является величина

$$L = \max\{\sqrt{\alpha^2 + \varepsilon^2}, \sqrt{\beta^2 + \varepsilon^2}\}. \quad (168)$$

Легко видеть, что независимо от ε условие (162) будет выполнено. Действительно, в (162) в качестве симметричной положительно определенной матрицы B возьмем единичную двумерную матрицу, тогда

$$(B(x - x_*), f(x)) = \left(\begin{pmatrix} x_1 - x_{1*} \\ x_2 - x_{2*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha(x_1 - x_{1*}) - \varepsilon(x_2 - x_{2*}) \\ \varepsilon(x_1 - x_{1*}) + \beta(x_2 - x_{2*}) \end{pmatrix} \right)$$

и, следовательно,

$$(B(x - x_*), f(x)) = \alpha(x_1 - x_{1*})^2 + \beta(x_2 - x_{2*})^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$(B(x - x_*), f(x)) \geq \min\{\alpha, \beta\} \|x - x_*\|^2,$$

где $\|x - x_*\| = \sqrt{(x_1 - x_{1*})^2 + (x_2 - x_{2*})^2}$.

Теперь найдем ε так, чтобы было выполнено условие (163).

$$\begin{aligned} |(f(x), C(x - x_*))| &= \\ &= \left| \left(\begin{pmatrix} \alpha(x_1 - x_{1*}) - \varepsilon(x_2 - x_{2*}) \\ \varepsilon(x_1 - x_{1*}) + \beta(x_2 - x_{2*}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(x_2 - x_{2*}) \\ x_1 - x_{1*} \end{pmatrix} \right) \right| = \\ &= |\varepsilon \|x - x_*\|^2 - (\beta - \alpha)(x_1 - x_{1*})(x_2 - x_{2*})|, \end{aligned}$$

следовательно,

$$|(f(x), C(x - x_*))| \geq \left(\varepsilon - \frac{|\beta - \alpha|}{2}\right) \|x - x_*\|^2.$$

Поэтому нетрудно видеть, что условие (163) будет выполнено, если

$$\varepsilon > \frac{|\beta - \alpha|}{2} =: \varepsilon_1. \quad (169)$$

Нам остается найти условие на ε для того, чтобы (161) было выполнено. Заметим, что если $x \in \text{int}Q$, то (161) безусловно верно. Пусть x

лежит на границе этого множества. На стороне O_1O_2 , являющейся частью прямой $d_1 : (n_1, x) = \frac{kx_1 - x_2}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0$, вычислим скалярное произведение

$(f(x), u_1)$, где $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ – направляющий вектор этой прямой

$$(f(x), u_1) = \left(\begin{pmatrix} \alpha(x_1 - x_{1*}) - \varepsilon(x_2 - x_{2*}) \\ \varepsilon(x_1 - x_{1*}) + \beta(x_2 - x_{2*}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \right).$$

Следовательно,

$$(f(x), u_1) = (\alpha + \beta k^2)x_1 + \varepsilon(x_{2*} - kx_{1*}) - (\alpha x_{1*} + \beta kx_{2*}).$$

Отсюда вытекает, что на прямой d_1 $(f(x), u_1) = 0$ только в одной точке, первая координата которой равна

$$x_1 = \frac{-\varepsilon(x_{2*} - kx_{1*}) + \alpha x_{1*} + \beta kx_{2*}}{\alpha + \beta k^2}.$$

Поэтому на O_1O_2 условие (161) будет верно, если

$$\frac{-\varepsilon(x_{2*} - kx_{1*}) + \alpha x_{1*} + \beta kx_{2*}}{\alpha + \beta k^2} < 0;$$

из этого и неравенства (167) следует, что

$$\varepsilon > \frac{\alpha x_{1*} + \beta kx_{2*}}{x_{2*} - kx_{1*}} =: \varepsilon_2. \quad (170)$$

Аналогично, на сторонах O_2O_3 , O_3O_4 и O_4O_1 , соответственно, вычислим скалярные произведения $(f(x), u_2)$, $(f(x), u_3)$ и $(f(x), u_4)$, где

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результате вычисления получим, что

$$(f(x), u_2) = -(\alpha + \beta k^2)x_1 - \varepsilon(x_{2*} + kx_{1*}) + \alpha x_{1*} - \beta kx_{2*},$$

$$(f(x), u_3) = \beta x_2 - \varepsilon(a + x_{1*}) - \beta x_{2*},$$

$$(f(x), u_4) = \alpha x_1 - \varepsilon(b - x_{2*}) - \alpha x_{1*}.$$

Нетрудно проверить, что условие (161) будет выполнено на сторонах O_2O_3 , O_3O_4 и O_4O_1 , если, соответственно, верны следующие неравенства:

$$-\frac{\varepsilon(x_{2*} + kx_{1*}) - \alpha x_{1*} + \beta kx_{2*}}{\alpha + \beta k^2} < -a,$$

$$\frac{\varepsilon(a + x_{1*}) + \beta x_{2*}}{\beta} > b,$$

$$\frac{\varepsilon(b - x_{2*}) + \alpha x_{1*}}{\alpha} > \frac{b}{k}.$$

Отсюда и из (167) вытекает, что

$$\varepsilon > \frac{a(\alpha + \beta k^2) + \alpha x_{1*} - \beta kx_{2*}}{x_{2*} + kx_{1*}} =: \varepsilon_3, \quad (171)$$

$$\varepsilon > \frac{\beta(b - x_{2*})}{a + x_{1*}} =: \varepsilon_4, \quad (172)$$

$$\varepsilon > \frac{\alpha(b - kx_{1*})}{k(b - x_{2*})} =: \varepsilon_5. \quad (173)$$

Из (169) – (173) следует, что если $\varepsilon_0 = \max_{i=1,5} \{\varepsilon_i\}$, то для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ все условия в обобщенной теореме 5.5 будут выполнены и, тем самым, доказана теорема 5.6.2.

5.7 Оценка близости и эксперименты численного анализа

Для системы (157) *гладкое* описание определяется следующим уравнением:

$$\dot{z} = f(z) - K \max_{i=1,4} \{(n_i, z - x_{O_i})_+\} \sum_{l \in M(z)} n_l, \quad (174)$$

где

$$l \in M(z) \Leftrightarrow (n_l, z) = \max_{i=1,4} \{(n_i, z - x_{O_i})_+\}.$$

Начальное условие:

$$z(t_0) = x_0 \in Q. \quad (175)$$

Поскольку векторы n_i ($i = \overline{1,4}$) (см. п. 5.6.1) не коллинеарны, то для любых двух не равных векторов n_i, n_j ($i, j = \overline{1,4}$ $i \neq j$) можно обозначить $\omega_{ij} \in (0, \pi)$ меньший из двух углов между этими векторами.

Заметим, что на множестве Q функция $f(x)$ ограничена по норме константой $C = L\|x_G\| = \frac{Lb\sqrt{k^2+1}}{k}$, где L – константа Липшица функции f , которая вычисляется по формуле (168).

Разность между решениями системы (157) и ее гладкого описания (174) можно оценить с помощью *теоремы об оценке близости*, которая будет сформулирована и доказана в пункте 5.7.1.

5.7.1 Теорема об оценке близости

Пусть $x(t), z(t)$ – решения, соответственно, системы (157) и (174), которые удовлетворяют начальным условиям:

$$x(t_0) = z(t_0) = x_0 \in Q.$$

Тогда при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ справедлива следующая оценка:

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \frac{Ce^{LT}}{\sqrt{L \min\{2 \cos \frac{\omega_0}{2}, 1\} \cos \frac{\omega_0}{2} \sqrt{K}}}, \quad (176)$$

где $\omega_0 = \max_{i,j=1,4, i \neq j} \{\omega_{ij}\}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что если $z \in Q$, то оценка (176) верна. Нас интересует справедливость этой оценки, когда $z \notin Q$. Для этого рассмотрим 4 случая.

Первый случай: существует такое $i_0 \in \{\overline{1, 4}\}$, что $z \notin Q_{i_0}$ и $z \in Q_i$ при $i \neq i_0$;

Второй случай: существуют $i_1, i_2 \in \{\overline{1, 4}\}$, что $z \notin Q_{i_1} \cup Q_{i_2}$ и $z \in Q_i$ при $i \neq i_1, i_2$;

Третий случай: существуют $i_1, i_2, i_3 \in \{\overline{1, 4}\}$, что $z \notin Q_{i_1} \cup Q_{i_2} \cup Q_{i_3}$ и $z \in Q_i$ при $i \neq i_1, i_2, i_3$;

Четвертый случай: $z \notin \bigcup_{i=\overline{1,4}} Q_i$.

Согласно теореме из параграфа 5.3 в двух первых случаях оценка (176) будет верна. Четвертый случай невозможен, так как $\bigcup_{i=\overline{1,4}} Q_i = \mathbb{R}^2$.

Остается доказать справедливость этой оценки в третьем случае. В этом

случае точка z может лежать в $-Q_{13}$ или в $-Q_{24}$, где

$$-Q_{13} = -Q_1 \cap -Q_3 \text{ и } -Q_{24} = -Q_2 \cap -Q_4$$

(см. Рис. 10).

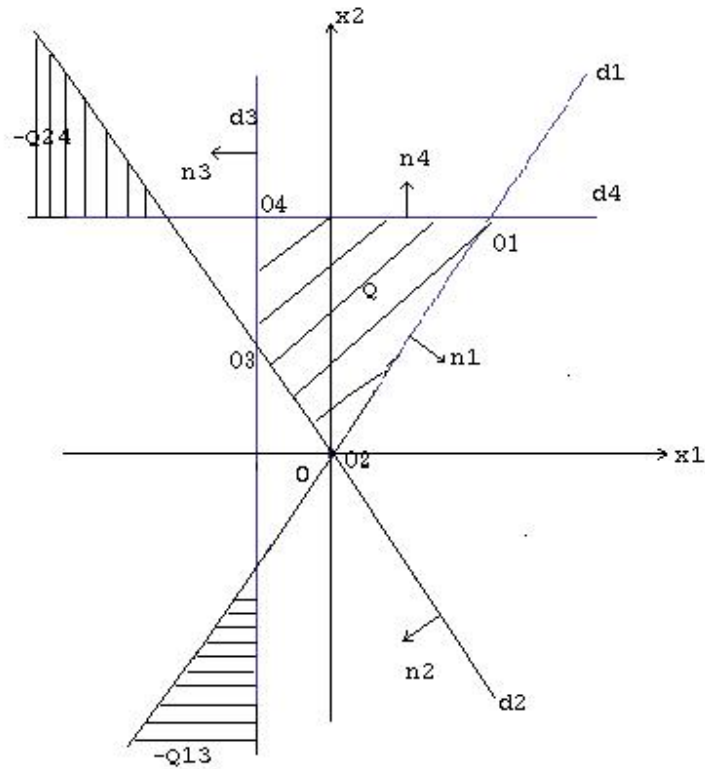


Рис. 10. Множества Q , $-Q_{13}$ и $-Q_{24}$.

Отсюда вытекает, что

$$\max_{i=1,4} \{(n_i, z - x_{O_i})_+\} = (n_2, z - x_{O_2})_+ \text{ при } z \in -Q_{13}$$

или

$$\max_{i=1,4} \{(n_i, z - x_{O_i})_+\} = (n_3, z - x_{O_3})_+ \text{ при } z \in -Q_{24}.$$

Тогда по теореме из параграфа 5.3 непосредственно получается справедливость оценки (176). Теорема 5.7.1 полностью доказана.

5.7.2 Эксперименты численного анализа

Приведем результаты некоторых экспериментов численного анализа, проведенных с помощью программы Mathematica 7.0. Для этого возьмем

$a = 0.5, b = 1.5, k = \sqrt{3}, \alpha = 0.1, \beta = 0.2, x_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, после этого можно найти $\varepsilon_0 = 0.34641$ (см. п. 5.6.2).

(а). Если возьмем $\varepsilon = 0.35641 > \varepsilon_0$, то решение системы (174) – (175), в которой $K = K_1 = 10^5$ практически имеет замкнутую траекторию. На рисунке (Рис. 11) изображены траектории решений, удовлетворяющих разным начальным условиям. Из этого рисунка следует вывод: при $\varepsilon > \varepsilon_0$ все траектории втекают в одну единственную замкнутую траекторию, лежащую в множестве Q .

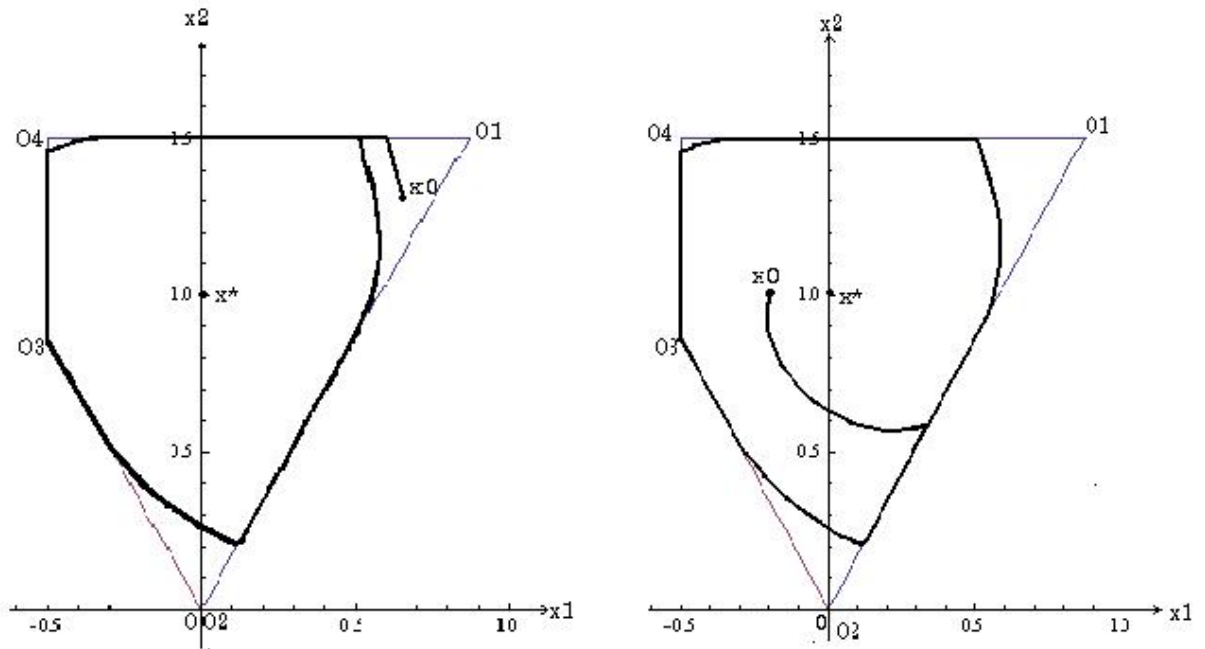


Рис. 11. Замкнутые траектории.

Если возьмем другой параметр $K = \frac{K_1}{2}$, то получим, что решения системы (174) – (175), в которой $K = K_1$ и $K = \frac{K_1}{2}$ практически имеют совпадающие замкнутые траектории. Это означает, что изучаемое гладкое описание (174) дает устойчивый результат, который не зависит от параметра K при K достаточно большом.

Если возьмем значение параметра K маленькое, например, $K = 5$, то полученный результат показывает, что гладкое описание (174) не дает устойчивый результат, именно, решение от значения параметра K зави-

сит сильно и его траектория не полностью лежит на множестве Q (см. Рис. 12).

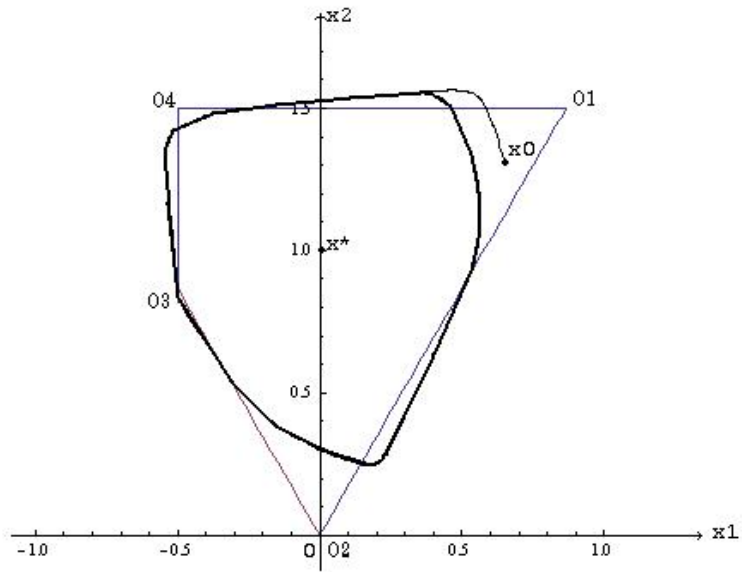


Рис. 12. Траектория решения при $K = 5$.

(б). Если возьмем $\varepsilon = 0.24641 < \varepsilon_0$, то на множестве Q решение системы (174) – (175), в которой $K = 10^5$ не имеет замкнутой траектории (см. Рис. 13).

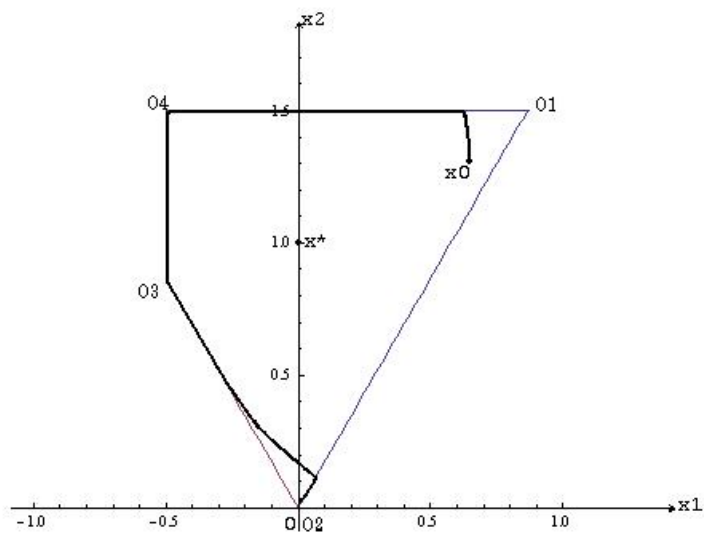


Рис. 13. Незамкнутая траектория.

Для конкретного эксперимента, когда $a = 0.5$, $b = 1.5$, $k = \sqrt{3}$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $x_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\varepsilon = 0.35641$ нетрудно проверить, что $\omega_0 = \frac{5\pi}{6}$. Тогда из теоремы об оценке близости в предыдущем пункте непосредственно следует, что при $t \in [0, 5]$ будет верна оценка (176), в которой $L = \sqrt{\alpha^2 + \varepsilon^2}$ и $C = \frac{Lb\sqrt{k^2+1}}{k}$. Поставим значения параметров в правой части этой оценки получим, что

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \frac{23.3457}{\sqrt{K}}.$$

Если возьмем $K = 10^5$, то $\|x(t) - z(t)\| < 0.0738257$.

Список литературы

- [1] Appell J. On the stability of some relay-type regulation system / J. Appell, I.N. Pryadko, B.N. Sadovsky // Z. Angew. Math. Mech. 88. – 2008. – № 10. – P. 808-816.
- [2] Владимиров А.А. Покровский А.В. Векторные гистерезисные нелинейности типа Мизеса – Треска / А.А. Владимиров [и др.] // ДАН СССР. – 1981. – Т. 257, № 3. – С. 506-509.
- [3] Воронов А.А. Основы теории автоматического управления / А.А. Воронов. – М.: Энергия, 1980. – 312 с.
- [4] Гильман Т.С. Вынужденные колебания систем с простейшими гистерезисными нелинейностями / Т.С. Гильман, А.В. Покровский // ДАН СССР. – 1982. – Т. 262, № 3. С. 437-450.
- [5] Golubev G. On the second order minimax estimation in partial linear models / G. Golubev, W. Hardle // Math. Methods of Stat. –2000. –V. 2. – P. 160-175.
- [6] Данилов Л. В. Ряды Вольтерры-Пикара в теории нелинейных электрических цепей / Л.В. Данилов. – М.: Радио и связь, 1987. – 224 с.
- [7] Данилов Л.В. Теория нелинейных электрических цепей / Л.В. Данилов, П.Н. Матханов, Е.С. Филиппов. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 256 с.
- [8] Дезоер Ч.А. Основы теории цепей / Ч.А. Дезоер, Э.С. Ку. – М.: Связь, 1976. – 286 с.
- [9] Дробченко Е.Ю. Об устойчивости положения равновесия двумерной системы дифференциальных уравнений с фазовыми ограничителями / Е.Ю. Дробченко, Р.В. Нестеренко, Б.Н. Садовский // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2001. – № 1. С. 95-96.

- [10] Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
- [11] Емельянов С.В. Теория систем с переменной структурой / С.В. Емельянов. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
- [12] Зубов С.В. Устойчивость периодических решений в системах с гистерезисом / С.В. Зубов // Нелинейный анализ и его приложения: тез. докл. междунар. конгр, Москва, 1-5 сент. 1998 г. – М., 1998. – С. 293-307.
- [13] Красносельский А.М. О континуумах циклов в системах с гистерезисом / А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский // Доклады РАН. – 2001. – Т. 378, № 3. – С. 314-319.
- [14] Красносельский М.А. Оператор-гистерант / М.А. Красносельский [и др.] // ДАН СССР. – 1970. – № 1. – С. 29-33.
- [15] Красносельский М.А. Системы гистероносов / М.А. Красносельский, А.В. Покровский // ДАН СССР. – 1971. – Т. 200, № 4, – С. 733-736.
- [16] Красносельский М.А. Периодические колебания в системах с релейными нелинейностями / М.А. Красносельский, А.В. Покровский // ДАН СССР. – 1974. – Т. 216, № 4. – С. 733-736.
- [17] Красносельский М.А. Моделирование преобразователей с гистерезисом континуальными системами реле / М.А. Красносельский, А.В. Покровский // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227, № 3. – С. 547–550.
- [18] Красносельский М.А. Правильные решения интегральных уравнений с разрывной нелинейностью / М.А. Красносельский, А.В. Покровский // ДАН СССР. – 1976. – Т. 226, № 3. – С. 506-509.
- [19] Красносельский М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. – М.: Наука, 1983. – 272 с.

- [20] Лобанова О.А. О движении точки в ограниченном фазовом пространстве / О.А. Лобанова // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. – Воронеж: ВорГУ, 1999. – С. 88-92.
- [21] Лобанова О.А. О существовании предельного цикла у линейной системы с ограничением / О.А. Лобанова // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2001. – № 1. – С. 108-110.
- [22] Лобанова О.А. О двумерных динамических системах с ограничением / О.А. Лобанова, Б.Н. Садовский // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Том. 43, № 4. – С. 449-456.
- [23] Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи / П. Н. Матханов. – М.: Высшая школа, 1986. – 352 с.
- [24] Mayergoyz I.D. Mathematical Models of Hysteresis / I.D. Mayergoyz. – New York: Springer, 1991. – 207 p.
- [25] Нестеренко Р.В. О вынужденных колебаниях в двумерном конусе / Р.В. Нестеренко, Б.Н. Садовский // Автом. и телемех. – 2002. – № 2. – С. 14-21.
- [26] Петрова Л.П. К математической теории электрических цепей с диодными преобразователями тока / Л.П. Петрова, Б.Н. Садовский. – Воронеж: ВорГУ, 1982. – 27 с.
- [27] Петрова Л.П. Об одной модели идеального диодного преобразователя / Л.П. Петрова // Тр. мат. факультета. – Воронеж: ВорГУ, 1996. – № 1 (новая серия). – С. 68-71.
- [28] Покровский А.В. К теории гистерезисных нелинейностей / А.В. Покровский // ДАН СССР. – 1973. – Т. 210, № 6. – С. 896 – 900.

- [29] Прядко И.Н. О локально явных моделях некоторых негладких систем / И.Н. Прядко, Б.Н. Садовский // Автом. и телемех. – 2004. – № 10. – С. 40-50.
- [30] Прядко И.Н. О локально явных уравнениях / И.Н. Прядко // Диссертация канд. физ.-мат. наук. – Воронеж, 2006. – 115 с.
- [31] Pryadko I.N. On locally explicit equations and systems with switching / I.N. Pryadko, B.N. Sadovsky // Func. Diff. Equat. – 2006. – Т. 13, № 3-4. – P. 571-584.
- [32] Садовский Б.Н. Системы с диодными нелинейностями и максимальные монотонные операторы / Б.Н. Садовский. В кн.: VIII школа по теории операторов в функциональных пространствах, 2 часть. – Рига, 1983.
- [33] Садовский Б.Н. К математической теории цепей с тиристорами / Б.Н. Садовский, М.П. Соболевская // Сб. научных трудов Динамика неоднородных систем. Материалы семинара. – М.: ВНИИСИ, 1984. – С. 178-182.
- [34] Садовский Б.Н. Замечания о системах с диодными нелинейностями / Б.Н. Садовский. – Ун-т Калабрии, департамент математики, Козенца, Италия, 1988. – 14 с.
Sadowsky B.N. Notes on systems with diode non-linearities, Univ. Calabria, Dip. Mat, Cosenza, Italy, 1988. – 14 p.
- [35] Садовский Б.Н. О двумерных динамических системах с ограничением / Б.Н. Садовский, О.А. Лобанова // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. конф, 30 июня-4 июля, Воронеж, 2003 г. – Воронеж, 2003. – С. 170-171.
- [36] Садовский Б.Н. О моделировании некоторых гистерезисных элементов локально явными уравнениями / Б.Н. Садовский, И.Н. Прядко

- // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. конф, 30 июня-4 июля, Воронеж, 2003 г. – Воронеж, 2003. – С. 196-197.
- [37] Семенов М.Е. Математическое моделирование динамических систем с гистерезисными явлениями / М.Е. Семенов // Диссертация д-ра физ.-мат. наук. – Воронеж, 2003. – 192 с.
- [38] Сеницкий Л.А. Методы аналитической механики в теории электрических цепей / Л.А. Сеницкий. - Львов : Вища школа, 1978. – 138 с.
- [39] Теоретические основы электротехники. Том I. Основы теории линейных цепей / Под редакцией Ионкина П.А. – М.: Высшая школа, 1976. – 544 с.
- [40] Цыпкин Я.З. Частотные характеристики релейных следящих систем / Я.З. Цыпкин // Автом. и телемех. – 1959. –Т. 20, № 12. – С. 1603-1610.
- [41] Цыпкин Я.З. Влияние случайных помех на периодический режим в релейных автоматических системах / Я.З. Цыпкин // Доклады АН СССР. –1961. – Т. 139, № 3. – С. 570-573.
- [42] Цыпкин Я.З. Об устойчивости релейных автоматических систем "в большом" / Я.З. Цыпкин // Известия АН СССР ОТН "Техника кибернетика". – 1963. – № 3. С. 121-135.
- [43] Цыпкин Я.З. частотный метод анализа автоколебаний и вынужденных колебаний в релейных системах автоматического регулирования / Я.З. Цыпкин // под ред. Солодовникова "машиностроение". – 1969. – Книга 3, ч. 2. – С. 101-104.
- [44] Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы / Я.З. Цыпкин. – М.: Наука, 1974. – 575 с.

- [45] Якубович В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями / В.А. Якубович // ДАН СССР. – 1963. – Т. 149, № 2. – С. 288-291.
- [46] Якубович В.А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями / В.А. Якубович // Автом. и телемех. – 1965. – Т. 26, № 5. – С. 753-763.
- [47] Якубович В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками / В.А. Якубович // Автом. и телемех. – 1967. – Т.23, №6. – С. 5-30.
- [48] Якубович В.А. К абстрактной теории абсолютной устойчивости нелинейных систем / В.А. Якубович // Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. – 1977. – № 13. – С. 100-113.
Yakubovich V.A. On an abstract theory of absolute stability of nonlinear systems / V.A.Yakubovich // Vestnik Leningr.Univ.Math. – 1982. – V.10. – P. 341-361.
- [49] Нгуен Тхи Хиен. Анализ автоколебаний в системе с двумя реле / Нгуен Тхи Хиен // Труды математического факультета. – Воронеж: ВорГУ, 2006. – Вып. 10 (новая серия). – С. 112-118.
- [50] Нгуен Тхи Хиен. Анализ автоколебаний в системе с двумя реле / Нгуен Тхи Хиен // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна: тез. докл, Воронеж, 2006 г. – Воронеж: ВорГУ, 2006. – С. 69.
- [51] Нгуен Тхи Хиен. Гладкие модели упора и люфта / Нгуен Тхи Хиен // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 2. – С. 92-95.

- [52] Нгуен Тхи Хиен. Гладкие модели упора и люфта / Нгуен Тхи Хиен // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна: тез. докл, Воронеж, 2010 г. – Воронеж: ВорГУ, 2010. – С. 108-109.
- [53] Нгуен Тхи Хиен. Гладкая модель реле с гистерезисом / Нгуен Тхи Хиен, Б.Н. Садовский // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна: тез. докл, Воронеж, 2010 г. – Воронеж: ВорГУ, 2010, с. 109-110.
- [54] Нгуен Тхи Хиен. Гладкая модель реле с гистерезисом / Нгуен Тхи Хиен, Б.Н. Садовский // Автом. и телемех. – 2010. – № 11. – С. 100-111.
- [55] Нгуен Тхи Хиен. О точности гладкой модели системы с диодной нелинейностью / Нгуен Тхи Хиен // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2010. – № 2. – С. 240-243.