Функциональный анализ и его приложения,
т. 6, вып. 3, 1972, 83—84.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ШАУДЕРА — ТИХОНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Мухамадиев, Х. Нажмиддинов, Б. Н. Садовский

При изучении вопроса о существовании ограниченных на всей оси решений у систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} + B(t)\,x = f(t, x)$$

важную роль играют интегральные операторы вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, s)\, f[s, x(s)]\, ds, \tag{1}$$

где G — функция Грина соответствующего линейного дифференциального оператора. Известно, что оператор A, как правило, не является вполне непрерывным в пространстве C непрерывных и ограниченных на всей оси функций x: $R^1 \to R^n$ с нормой $\| x \| = \sup\{\| x(t) \| : t \in R^1\}$. Это затрудняет применение в задаче о неподвижных точках оператора A традиционных топологических методов. Многими авторами (см., например, [1], [2]) частично используется тот факт, что оператор A преобразует ограниченные множества в ограниченные и равностепенно непрерывные и, следовательно, относительно компактные в топологии равномерной сходимости на каждом конечном промежутке (которая, как известно, локально выпукла и метризуема; в дальнейшем мы называем эту топологию c-топологией).

В настоящей заметке мы обращаем внимание на то обстоятельство, что при естественных ограничениях на B и f операторы типа (1) на некоторых множествах пространства C не только c-компактны, но и c-непрерывны, т. е. c-вполне непрерывны. Это простое соображение позволяет в ряде случаев устанавливать существование неподвижных точек у оператора A непосредственно с помощью теоремы Шаудера — Тихонова [3]. Полученные на этом пути утверждения (теорема 3) содержат, в частности, некоторые теоремы о существовании ограниченных решений у обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом из [4], [5] и [6], где эти результаты доказываются значительно сложнее.

1. Лемма. *Любое c-замкнутое ограниченное в C множество F c-полно.*

Доказательство. Пусть $\{x_k : k = 1, 2, \ldots\}$ — c-фундаментальная последовательность в F. Тогда существует такая функция x_0, непрерывная на всей оси, что $x_k(t) \to x_0(t)$ равномерно на каждом конечном промежутке. В силу ограниченности множества F, последовательность $\{x_k\}$ ограничена в C, и, следовательно, ограничена функция x_0, т. е. $x_0 \in C$. Наконец, $x_0 \in F$, так как множество F c-замкнуто. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть множество F выпукло, c-замкнуто и ограничено в C. Пусть c-непрерывный оператор A действует в F ($AF \subset F$) и множество AF равностепенно непрерывно на каждом конечном промежутке. Тогда A имеет в F неподвижную точку.*

Доказательство. Обозначим через F_1 c-замыкание выпуклой оболочки множества AF. Тогда $F_1 \subset F$, так как F c-замкнуто и выпукло и $AF \subset F$. В силу теоремы Арцела ограниченное множество F c-относительно компактно. Поэтому из теоремы Мазура и леммы вытекает, что множество F_1 c-компактно. Поскольку, очевидно, $AF_1 \subset F_1$, утверждение нашей теоремы следует из принципа Шаудера — Тихонова.

2. В пространстве C рассмотрим функциональное уравнение

$$(Lx)(t) \equiv \dot{x}(t) + (Bx)(t) = (fx)(t), \tag{2}$$

где B и f — соответственно линейный и нелинейный ограниченные операторы, действующие в C (ограниченность f означает, что он переводит ограниченные множества в ограниченные). Пусть линейный оператор L имеет ограниченный обратный, который определен на всем пространстве C. Тогда уравнение (2) эквивалентно уравнению $x = L^{-1}fx$.

Теорема 2. *Пусть оператор $A = L^{-1}f$ переводит замкнутый шар T в себя. Пусть операторы B и f c-непрерывны на T. Тогда уравнение* (2) *имеет решение в C.*

Замкнутый шар пространства C, как нетрудно видеть, c-замкнут. Поэтому, в силу теоремы 1, достаточно показать, что оператор $A = L^{-1}f$ c-непрерывен и множество

AT равностепенно непрерывно на каждом конечном промежутке (фактически мы покажем, что оно равностепенно непрерывно на всей оси). Пусть $y \in L^{-1}fT$, тогда $\dot{y} + By = fx$ для некоторого $x \in T$. По условию, $y \in T$ и операторы B, f ограничены; следовательно, существует $r > 0$ такое, что $\| \dot{y} \| \leqslant r$ для любого $y \in L^{-1}fT$. Отсюда вытекает равностепенная непрерывность множества $AT = L^{-1}fT$. Пусть теперь последовательность $x_k \in T$ $(k = 1, 2, \ldots)$ c-сходится к некоторому $x_0 \in T$. Покажем, что последовательность $y_k = L^{-1}fx_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ c-сходится к $L^{-1}fx_0$. Действительно, так как эта последовательность ограничена и равностепенно непрерывна, из нее можно выделить подпоследовательность $\{y_{k_i}\}$, c-сходящуюся к некоторой функции y_0. Ввиду c-непрерывности операторов B, f и равенства $\dot{y}_{k_i} + By_{k_i} = fx_{k_i}$ последовательность $\{\dot{y}_{k_i}\}$ c-сходится. Следовательно, она сходится к $\dot{y}_0$, и $\dot{y}_0 + By_0 = fx_0$. Это равенство означает, что $y_0 = L^{-1}fx_0$, т. е. любая c-предельная точка c-относительно компактной последовательности $\{y_k\}$ совпадает с $L^{-1}fx_0$. Но это значит, что сама последовательность c-сходится к $L^{-1}fx_0$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть операторы B и f c-непрерывны на каждом шаре пространства C, причем оператор f удовлетворяет условию $\| fx \| \leqslant M \| x \| + N$ $(x \in C;\ M, N$ — константы), где $M \| L^{-1} \| < 1$. Тогда уравнение* (2) *имеет по крайней мере одно решение в C.*

Для доказательства заметим, что любой шар радиуса $\rho \geqslant N (1 - M \| L^{-1} \|)^{-1}$ с центром в нуле удовлетворяет условиям теоремы 2.

3. В заключение приведем примеры линейных и нелинейных операторов, действующих в C и c-непрерывных на каждом шаре. Таким примерами могут служить операторы B и f, определенные равенствами

$$(Bx)(t) = b(t)\, x(t), \qquad (fx)(t) = \varphi_1 [t, x(t)],$$

$$(Bx)(t) = \int_a^b [d_s g(t, s)]\, x(t + s), \qquad (fx)(t) = \varphi_2 \left[t, x(t), \int_a^b [d_s g(t, s)]\, x(t + s)\right],$$

где $b(t)$ — матрица, элементы которой суть непрерывные и ограниченные на всей оси функции; функции $\varphi_1(t, x)$, $\varphi_2(t, x, y)$ непрерывны по совокупности переменных и ограничены по t равномерно относительно значений x, y из каждого шара $\| x \|, \| y \| \leqslant r$; $g(t, s)$ — матрица, элементами которой являются функции ограниченной вариации по s при любом t, и такая, что порожденный ею оператор B действует и ограничен в C.

Воронежский государственный университет
имени Ленинского комсомола

Поступило в редакцию
20 августа 1971 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А., Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1966. 2. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., «Наука», 1970. 3. Эдвардс Р., Функциональный анализ, М., «Мир», 1969. 4. Демидович Б. П., Матем. сб. 40 (1956), 73—94. 5. Демидович Б. П., ДАН СССР 138, № 6 (1961), 1273—1275. 6. Борисович Ю. Г., Турбабин А. С., Труды матем. ф-та ВГУ, Труды семинара по функц. анализу, Сб. статей по функциональным пространствам и операторным уравнениям, Воронеж, 1970, 3—17.