Если $\alpha \in \Gamma_-$, то при любом $w \in E^*$ $\varliminf\limits_{z\to\alpha} g(z, w) > 0$. Введем в окрестности α параметр $\varkappa = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arg \frac{\alpha - z}{\alpha}$. Доказывается, что если $z \to \alpha$ и $\varkappa \to \lambda$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, то $\lim g(z, w) = \lambda h^-(\alpha, w) + (1-\lambda) h^+(\alpha, w)$, где $h^-(\alpha, w)$ $(h^+(\alpha, w))$ обозначает предел $g(z, w)$, когда z приближается к α, касаясь L, и $\arg z < \arg \alpha$ (соответственно $\arg z > > \arg \alpha$). Введем в окрестности α параметр $\xi = \frac{\varkappa h^-(\alpha, w_0)}{\varkappa h^-(\alpha, w_0) + (1-\varkappa) h^+(\alpha, w_0)}$. Из предыдущего следует, что если $z \to \alpha$ и $\xi \to \mu$, то $\lim k_z(w) = \mu k_\alpha^-(w) + (1-\mu) k_\alpha^+(w)$, где $k_\alpha^-(w) = \frac{h^-(\alpha, w)}{h^-(\alpha, w_0)}$ и $k_\alpha^+(w) = \frac{h^+(\alpha, w)}{h^+(\alpha, w_0)}$.

В терминах теории границ Мартина эти результаты можно сформулировать в виде следующих теорем (ср. [1]).

Теорема 1. *Пусть Γ_+ непусто. Входная граница Мартина B для процесса Z распадается на связные компоненты B_α $(\alpha \in \Gamma)$. При $\alpha \in \Gamma_+$ компонента B_α состоит из одной точки b_α. При $\alpha \in \Gamma_-$ компонента B_α является отрезком. Точки этого отрезка будут обозначаться b_α^μ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$.*

Теорема 2. *Если $\alpha \in \Gamma_+$, то сходимость z к b_α (в топологии Мартина) эквивалентна сходимости z к α в обычной топологии плоскости. Если $\alpha \in \Gamma_-$, то для сходимости z к b_α^μ (в топологии Мартина) необходимо и достаточно, чтобы $z \to \alpha$ и $\xi \to \mu$.*

В заключение выражаю искреннюю благодарность Е. Б. Дынкину, под руководством которого была выполнена эта работа.

Поступило в Правление общества 31 марта 1966 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Границы Мартина и неотрицательные решения краевой задачи с наклонной производной, УМН 19, вып. 5 (119) (1964), 3—50.

[2] Дж. А. Хант, Марковские процессы и потенциалы, М., ИЛ, 1962.

[3] Г. А. Хант, Цепи Маркова и границы Мартина, Матем. 5 : 5 (1961), 121—149.

[4] H. Kunita, T. Watanabe, Markov processes and Martin boundaries, Bull. Amer. Math. Soc. 69, № 3 (1963), 386—391.

К ВОПРОСУ ОБ УСЛОВИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. Н. Садовский

1. Рассмотрим вначале скалярную задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad x(0) = 0. \tag{1}$$

Обычные условия единственности (см., например [1], [2]) формулируются в виде неравенств, в которых фигурирует разность $f(t, x) - f(t, y)$. Такие условия, как нам кажется, не охватывают многие уравнения. Чтобы пояснить эту мысль, рассмотрим семейство задач

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \varepsilon, \ x(0) = 0 \tag{2}$$

при различных ε. Простые рассуждения показывают, что задача (2) может иметь не единственное решение не более, чем при счетном множестве значений ε. Этот факт не может быть уловлен при помощи признаков единственности, основанных на оценке разности $f(t, x) - f(t, y)$ при любых x, y. Ниже приводятся теоремы, в которых условия на соответствующие разности накладываются лишь вблизи некоторого направления.

Заметим, что с помощью этих теорем можно установить единственность решения задачи (2) при $\varepsilon = \varepsilon_0$, несмотря на то, что при других ε единственность может не иметь места. В частности, признаки такого типа позволяют установить единственность решения скалярной задачи $\frac{dx}{dt} = \sqrt{x} + 1$, $x(0) = 0$.

2. Теорема 1. *Пусть $f(t, x)$ $(0 \leqslant t \leqslant a, |x| \leqslant b)$ непрерывна по совокупности переменных. Пусть при $|u - f(0, 0)| \leqslant \alpha$, $|v - f(0, 0)| \leqslant \alpha$, $u > v$, $0 \leqslant t \leqslant a_1$ выполнено неравенство*

$$f(t, ut) - f(t, vt) \leqslant u - v + ta(t) L(u - v), \tag{3}$$

где $a(t)$ суммируема, а непрерывная и положительная функция $L(s)$ удовлетворяет условию Осгуда:

$$\int_0 \frac{ds}{L(s)} = +\infty. \tag{4}$$

Тогда задача (1) имеет единственное на некотором отрезке $[0, a_2]$ $(a_2 > 0)$ решение.

Эта теорема использует один результат А. И. Перова [3]. Теорема 1 по известной схеме ([4], [5]) может быть использована для доказательства единственности решения дифференциального уравнения в банаховом пространстве.

Приведем одну теорему, относящуюся к задаче (1) в банаховом пространстве E. Пусть функционал $\varphi(t, u, v)$ $(0 \leqslant t \leqslant a;\ u, v \in E)$ неотрицателен и обращается в нуль только при $u = v$. Пусть его приращение удовлетворяет неравенству

$$\varphi(t + \Delta t, u + \Delta u, v + \Delta v) - \varphi(t, u, v) \leqslant D_1(t, u, v)(\Delta t) +$$
$$+ D_2(t, u, v)(\Delta u) + D_3(t, u, v)(\Delta v) + o(|t| + \|\Delta u\| + \|\Delta v\|),$$

где D_1, D_2, D_3 однородны, а D_2 и D_3 полунепрерывны: $\overline{\lim\limits_{h \to h_0}} D_i(h) \leqslant D_i(h_0)$. Кроме того, будем предполагать, что для любых двух решений $u(t)$ и $v(t)$ задачи (1) выполняется соотношение

$$\frac{\varphi[t, u(t), v(t)]}{t} \xrightarrow[t \to +0]{} 0.$$

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения (1) при*

$$\|u - f(0, 0)\| \leqslant \alpha, \quad \|v - f(0, 0)\| \leqslant \alpha \ (\alpha > 0), \quad u \neq v, \quad 0 \leqslant t \leqslant a_1 \ (a_1 > 0)$$

удовлетворяет неравенству

$$D_1(t, ut, vt)(1) + D_2(t, ut, vt)[f(t, ut)] + D_3(t, ut, vt)[f(t, vt)] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varphi(t, ut, vt)}{t} + ta(t) L\left[\frac{\varphi(t, ut, vt)}{t}\right],$$

где $a(t)$ суммируема, а $L(s)$ удовлетворяет условию (4).

Тогда существует отрезок $[0, a_2]$ $(a_2 > 0)$, на котором задача (1) имеет не более одного решения.

3. Сделанное в п. 1 замечание о том, что задача (2) имеет единственное решение при всех ε, кроме, быть может, счетного множества, допускает различные обобщения. Рассмотрим зависящее от скалярного параметра ε семейство систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_\varepsilon(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть компоненты $f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$ вектор-функции $f_\varepsilon(t, x)$ строго монотонны по ε и не убывают по внедиагональным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

Тогда множество значений ε, при которых решение задачи (5) не единственно, не более чем счетно.

4. Во время доклада на заседании воронежского семинара по функциональному анализу М. А. Красносельский обратил внимание на тот факт, что теорема 3

переносится на смешанные задачи для нелинейных параболических уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) + f(t, u) + \varepsilon.$$

Как выяснили Ю. С. Колесов и автор, это замечание может быть перенесено на более общие уравнения и на тот случай, когда параметр ε входит в правую часть не аддитивно (если имеет место строгая монотонность по ε).

Автор благодарен М. А. Красносельскому и П. П. Забрейко за внимание и советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1964.

[2] Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1, 2, М., ИЛ, 1954.

[3] А. И. Перов, О теоремах единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН **120**, № 4 (1958), 704—707.

[4] М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, Труды сем. по функц. ан., вып. 2, Воронеж (1956), 3—23.

[5] А. В. Кибенко, К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, ДАН **136**, № 5 (1961), 1019-1021.

КРИТЕРИИ НЕРАЗЛОЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Я. Стеценко

Классическая теорема Перрона — Фробениуса о спектральных свойствах неотрицательных матриц обобщалась многими авторами на случай интегральных и абстрактных операторов (см. [1]—[8]). Излагаемые ниже теоремы дополняют результаты работ [2]—[4], [6]—[8].

1. Пусть E — банахово пространство, полуупорядоченное воспроизводящим конусом K. Ниже через K^* обозначается сопряженный конус, A — линейный положительный ($AK \subset K$) оператор, действующий в E, $r(A)$ — спектральный радиус оператора A.

Оператор A будем называть *неразложимым*, если из неравенства $\alpha x_0 \geqslant Ax_0$, где x_0 — некоторый ненулевой элемент K, $\alpha > 0$ — некоторое число, следует, что $l(x_0) > 0$ для каждого ненулевого $l \in K^*$.

Можно показать, что это определение обобщает определения неразложимости матрицы и линейного оператора, приведенные в [1], [4], [5], [7]—[9]. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Для неразложимости оператора A необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in K$, $x \neq \theta$ и каждого $l \in K^*$, $l \neq \theta$ существовало такое $n = n(x, l)$, что $l(A^n x) > 0$.*

Теорема 2. *Пусть E рефлексивно. Тогда для неразложимости оператора A необходима и достаточна неразложимость оператора A^*.*

Собственное значение λ оператора A называется *позитивным*, если ему соответствует хотя бы один собственный вектор из конуса.

Теорема 3. *Пусть конус K миниэдрален, воспроизводящий и нормален. Пусть оператор A^* неразложим и имеет в K собственный вектор, с собственным значением $\lambda = r(A)$. Пусть, наконец, для некоторого $x_0 \in E$ $-x_0 \overline{\in} K$ выполняется соотношение $r(A)x_0 \leqslant Ax_0$. Тогда $r(A)$ является позитивным собственным значением A.*

Непосредственная проверка условий теоремы 3 затруднительна. Поэтому могут оказаться полезными наряду с теоремой 2 следующие две теоремы, представляющие, как нам кажется, самостоятельный интерес.